國立中山大學96學年度轉學生招生考試試題

科目：**微積分【應數系二年級】** 共　頁第　頁

共十題，每題10分。答題時，每題都必須寫下題號與詳細步驟。請依題號順序作答，不會作答題目請寫下題號並留空白。

1. Suppose that $f(x) = \frac{2+x}{1+x-6x^2}$. Find a closed form for $f^{(n)}(0), n = 1, 2, \ldots$.

2. A ladder 8 m long leans against a wall 4 m high. The lower end of the ladder is pulled away from the wall at a rate of 2 m/sec. How fast is the angle between the top of the ladder and the wall changing when the angle is $60° = \pi/3$ radians?

3. Compute $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$.

4. The base of a certain solid is the circular disk $x^2 + y^2 \leq 4$ in the xy-plane. Each plane perpendicular to the x-axis cuts the solid in an equilateral triangle. Find the volume of the solid.

5. Compute $\int \frac{x+8}{x^2+6x+12}\, dx$.

6. Evaluate
$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}.$$

7. Find the area inside the circle $r = 5\sin\theta$ and outside the limacon $r = 2 + \sin\theta$.

8. Evaluate
$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\frac{a^x - 1}{a - 1}\right)^{1/x}, \quad \text{where } a > 0, a \neq 1.$$

9. Evaluate
$$\frac{1^2}{0!} + \frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{4^2}{3!} + \cdots$$

10. Find the volume of the solid bounded by xy-plane, the cylinder $x^2+y^2 = 4$, and the paraboloid $z = 2(x^2 + y^2)$.

除第 7 題 20 分外, 每題 10 分. 若題內有小題則平均之.

1. 敘述定義與定理:

(1) Normal matrices.

(2) Caley-Hamilton theorem.

(3) Positive definite matrix.

(4) Isometry.

(5) Eigenvalues of matrices.

2. 設 $A=(a_{ij})$ 爲一 $n\times n$ 矩陣. 令 $\mathrm{trace}(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$. 若 A 爲一 2×2 矩陣, 証明: $\det(I+A)=1+\det(A) \iff \mathrm{trace}(A)=0$.

3. 一個學生在解方程組

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & 3z & = & -2 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 4 \end{array}$$

時不小心將第二列方程式等式左邊係數抄錯，因此得到無窮多解。假設此生計算過程沒有錯誤，請列出他所有可能抄下的係數。

4. 找出在 $\mathbb{R}^3$ 中以直線 $\{(ta,tb,tc): t\in\mathbb{R}\}$ 爲軸旋轉, (t_0a,t_0b,t_0c) 爲圓心, 而半徑爲 r 之圓的參數式.

5. 找出 6×6 矩陣 A 之 Jordan 自然式 J 以及一可逆矩陣 S 使得 $S^{-1}AS=J$, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. 在"相似即爲同類"的前提之下, 有多少不同類的矩陣的特徵多項式爲

$$(x-2)^5(x+2)^2(x-3)^3?$$

7. 設 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha^2+4\beta>0$, 且數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_n=\alpha a_{n-1}+\beta a_{n-2}$, $n\geq 2$, $a_0=a_1=1$. 利用一 2×2 矩陣的特徵值求 $\{a_n\}$ 通式.

8.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

是否可逆？若可逆，求 A^{-1}。

9. 令 $W=\mathrm{sp}([1,1,1,1],[-1,1,-1,1],[1,1,-1,-1])$.

(1) 求 $W^{\perp}$.

(2) 求 W 及 $W^{\perp}$ 之垂直投影 P_W 與 $P_{W^{\perp}}$ 之矩陣.