國立中山大學95學年度轉學生招生考試試題

科目：微積分【應數系二年級】

In the following problems, let $\mathbb{R}$ denote the set of all real numbers.

Problem 1. Let p, $q \in \mathbb{R}$, and let $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ be a function. Assume that f is continuous at 0, and assume that

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(5x)}{x} & \text{when } x > 0, \\[2ex] \dfrac{p\tan^{-1}x + q\sqrt{x^2+x+1} - 2x + 2}{x} & \text{when } x < 0. \end{cases}$$

Evaluate the values of p and q. (10 %)

Problem 2. Let

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 4} \quad \text{for } x \in \mathbb{R}.$$

Evaluate the 6-th order derivative $f^{(6)}(1)$ of f at 1. (10 %)

Problem 3. Let $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ be a function, and for every integer $n > 0$ let

$$x_n = \frac{7^n}{n^2} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Assume that $f(x) > 0$ for all $x > 0$ and $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$. Evaluate $\lim_{n \to \infty} x_n^{\frac{1}{n}}$. (10 %)

Problem 4. Find the radius and interval of convergence of the power series : (15 %)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+8)}{\sqrt{n+8}} (3-x)^n$$

Problem 5. Let $f(x) = 2 + \pi - 12 \int_1^x \frac{\tan^{-1} u}{u^4}\, du$ for $x > 0$. Evaluate $\lim_{x \to 0^+} x^2 f(x)$. (15 %)

Problem 6. Evaluate the limit $\lim_{x \to \infty} e^x \int_{e^{3x}}^{\infty} \frac{dt}{1 + 2\sqrt[3]{t^4}}$ (10 %)

Problem 7. Let $n > 1$ be an integer, and let $a_1, \ldots, a_n$ be n real numbers with $0 < a_j < 1$ for every j. Prove that there is a unique real number $p > 0$ such that $\sum_{j=1}^{n} a_j^p = 1$. (10 %)

Problem 8. Evaluate the iterated integral $\int_0^1 \int_x^1 \frac{dy}{1 + y^4}\, dx$. (10 %)

Problem 9. Evaluate the mixed partial derivative $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0, 0)$, where $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ is the function defined by

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y\sin x - x\sin y}{1 - e^{x^2+y^2}} & \text{when } (x, y) \neq (0, 0), \\[2ex] 0 & \text{when } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(10 %)

國立中山大學95學年度轉學生招生考試試題

科目：線性代數【應數系二年級】

每題 10 分. 若題內有小題則平均之.

1. 敘述定義:

(1) $A \sim B$ (A 與 B 相似).

(2) Quadratic form.

(3) Hermitian matrix.

(4) Unitary matrix.

(5) Orthogonal projection (垂直投影).

2. 若 T 爲一 $n \times n$ 實對稱矩陣, 証明 $I_n - iT$ 爲可逆 ($i = \sqrt{-1}$).

3. 判斷方程式

$$3x^2 - 4xy + y^2 + 4y = 10$$

代表何種圓椎曲線, 並計算其相關特徵資訊, 如中心點, 長短軸或實虛軸之方程式等.

4. (a) 敘述 rank 定理. (b) 証明: 若 A 爲一 $n \times n$ 矩陣, 則

$$\operatorname{rank}(A^*A) = \operatorname{rank}(A).$$

5. 找出在 $\mathbb{R}^3$ 中以向量 $[1,1,1]$ 爲軸旋轉 45° 之映射 T 對於標準基底之矩陣.

6. 找出 6×6 矩陣 A 之 Jordan 自然式 J 以及一可逆矩陣 S 使得 $S^{-1}AS = J$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. 在"相似即爲同類"的前提之下, 有多少不同類的矩陣的特徵多項式爲

$$(x-1)^4(x+1)^4(x-3)^6?$$

8. 找出一 unitary 矩陣 U 使得 U^*AU 爲對角矩陣, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-2i \\ 0 & 5 & 0 \\ 1+2i & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. 令 A 爲下列之 3×3 矩陣

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

用 A 的特徵多項式計算 $A^8 + A^7 - 3A^6 + 5A^2 - A$.

10. 令 $W = \operatorname{sp}([1,2,1,-1],[0,-1,1,-1])$.

(1) 求 $W^\perp$.

(2) 求 W 及 $W^\perp$ 之垂直投影 P_W 與 $P_{W^\perp}$ 之矩陣.