

國立中山大學八十九學年度碩博士班招生考試試題

科目：應用數學

物理學系碩士班

共 / 頁 第 頁

1. (15%; 5% each) Carry out the following operation:

(a)  $\nabla \cdot (y^2 e^z \mathbf{i} + x^2 z^2 \mathbf{k})$

(b)  $\nabla^2(x^2 + 4y^2 + 9z^2)$

(c)  $\nabla \times [(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})]$

2. (10%) Solve the following differential equation:

$$(x^3 + 3xy^2) dx + (3x^2y + y^3) dy = 0$$

3. (15%) Solve the following differential equation:

$$3 \frac{d^2y}{dx^2} + 10 \frac{dy}{dx} + 3y = x^2 + \sin x$$

4. (20%) Solve the following partial differential equation subject to the specified initial and boundary conditions:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{aligned}$$

5. (10%) Solve the following system of differential equations:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y_1}{dx^2} &= -5y_1 + 2y_2 \\ \frac{d^2y_2}{dx^2} &= 2y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

6. (10%) Applying the LaPlace transform to solve the following initial value problem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 2x, \quad y(\pi/4) = \pi/2, \quad y'(\pi/4) = 2 - \sqrt{2}$$

7. Carry out the following integrations:

(a) (10%)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - ix}$$

(b) (10%)

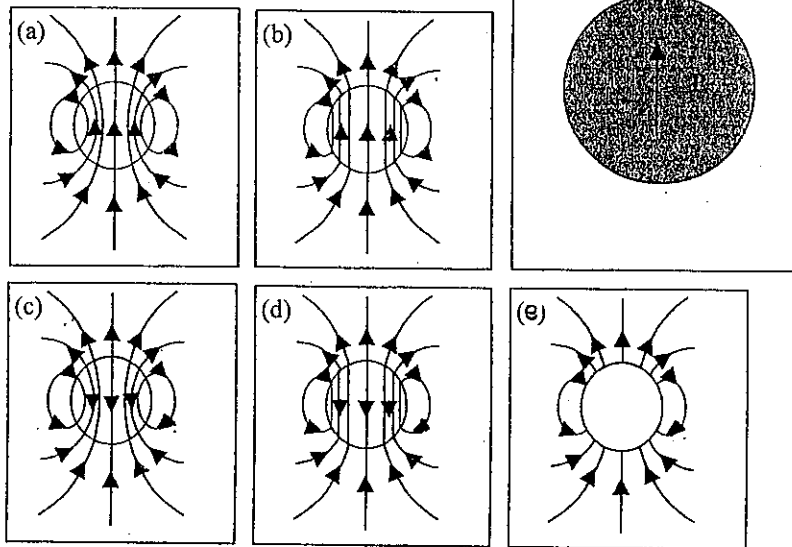
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \frac{1}{2} \cos \theta}$$

試題共分二部份：第一部份選擇題共七題，每題七分

1. 一接地之導體球置於一均勻分佈的電場( $E_0$ )中，請問在導體球內之電場為何值？

- (a)  $2E_0$
- (b)  $E_0$
- (c) 0
- (d)  $-E_0$
- (e)  $-2E_0$

2. 一圓形介電材料，內含均勻電偶極矩( $\vec{P}$ )，請問圓球內外之電場分佈為下列何者？



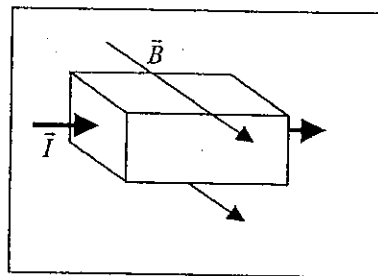
3. 在一真空腔內有一電子槍，槍口射出平行前進之電子束，以高速前進。請問，此時若無其他外力之影響下，該電子束會

- (a) 維持出槍口時之平行，繼續往前進。
- (b) 會因行進時產生之磁場而產生聚焦的現象。
- (c) 會因電荷間的庫侖排斥力遠大於磁性之勞侖茲力而產生發散現象。
- (d) 會先行因庫侖力而發散，後由勞侖茲力產生聚焦。
- (e) 會先行因勞侖茲力產生聚焦，最後與庫侖排斥力平衡，形成較小直徑之電子束，平行前進。

4. 靜磁學中之  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  代表無單磁極的存在。若在未來的某日，發現單磁極的存在，而且該式可以改寫為  $\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_B$  時，請問，物體在靜電及靜磁場中的受力方程式為： $\vec{F} =$

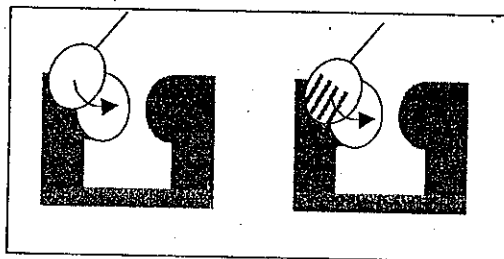
- (a)  $Q_e \vec{E} + Q_e (\vec{v} \times \vec{B})$
- (b)  $Q_e \vec{E}$
- (c)  $Q_e \vec{E} + Q_m \vec{B} + Q_e (\vec{v} \times \vec{B})$
- (d)  $Q_m \vec{B} + Q_e (\vec{v} \times \vec{B})$
- (e)  $Q_m \vec{B}$

5. 外加電流以橫向流經一 p 型半導體，垂直於電流方向並且平行於底面則是外加磁場(如圖所示)，請問樣品之上表面及下表面因霍爾效應分別累積了



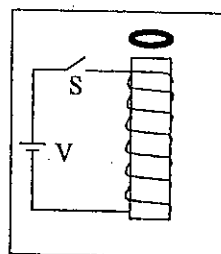
- (a) +, - 電荷
- (b) +, + 電荷
- (c) -, + 電荷
- (d) -, - 電荷
- (e) 無任何累積電荷。

6. 二薄薄的圓鋁片以一細繩懸馬蹄型磁鐵中。其中一片以細鋸將圓片下半部切成細條狀。當輕推圓片使往回垂直於磁鐵中心連線擺盪，請問發生何事？



- (a) 左邊無切口者，較快停止
- (b) 右邊有切口者，較快停止
- (c) 兩者停止的速度完全相同
- (d) 兩者都不會停止，以相同的擺盪速度，繼續擺盪
- (e) 兩者會越擺越高。

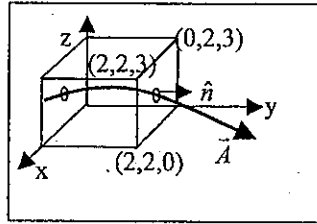
7. 將環狀線圈置於電磁鐵上。當開關 S 尚未關上時，電磁鐵無任何殘磁。當開關合上時，電磁鐵立即產生一磁場，請問此時該環狀線圈會如何反應？



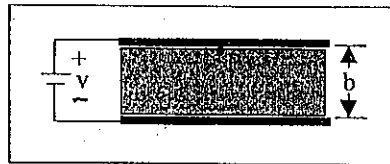
- (a) 緊緊的吸在電磁鐵頂部
- (b) 立即被排斥而往上跳
- (c) 立即因楞次定律而原地旋轉
- (d) 根本不會發生任何事

第二部份計算題共伍拾壹分

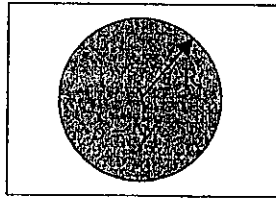
8. (6%) 向量  $\vec{A} = 2xy\hat{x} + (x+2)\hat{y} + y(z-3)\hat{z}$  穿過一四方盒，盒子在  $x$ 、 $y$  及  $z$  軸上的長度分別為 2、2 及 3，其面積向量方向由盒內指向盒外。請計算通過此盒表面的總通量？



9. (21%) 平行板電容器內含一線性介電材料。電容器外接於直流電池 ( $V$ )。請問，當充電完畢時，(a) 導體平行板上的電荷密度為何？(b) 介電材料之上表面， $P$  點處之表面束縛電荷密度為何？(c) 介電材料中之體束縛電荷密度為何？



10. (24%) 半徑為  $R$  之圓球內，電荷密度與半徑成反比分佈 ( $\rho = K/r$ )，請問 (a) 球內及 (b) 球外電場  $\vec{E}$  為何？(c) 球內及 (d) 球外電位為何？



# 國立中山大學八十九學年度碩博士班招生考試試題

科 目：近代物理 物理學系碩士班

共 / 頁 第 頁

1. (每小題 4 分, 共 20 分) 簡要說明下列問題:

- (a) Wilson-Sommerfeld Quantization Rules
- (b) Lamb shift
- (c)  $K_{\alpha}$  line of X-ray
- (d) Stark effect
- (e) Hyperfine structure

2. (每小題 10 分, 共 20 分) 利用狹義相對論

- (a) 證明  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ , 其中  $m_0$  為質點靜態質量,  $v$  為質點速度,  $c$  為光速。
- (b) 估算一靜止電子之半徑。假設電子電荷為球狀均勻分佈。

3. (每小題 4 分, 共 20 分) 氫原子之電子座標如圖 1 所示, 其波函數為  $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ 。

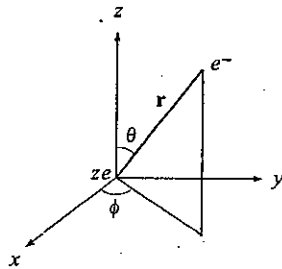


圖 1:

- (a) 當  $r \rightarrow 0$ ,  $R(r)$  大致為何?
- (b) 繪圖說明電子在 2s 及 2p 狀態之角向機率密度。
- (c) 說明電子運動之空間量子化 (space quantization)。
- (d) 若考慮電子之 spin-orbit interaction, 則對於能階之變化影響, 大約多少電子伏特 (ev)?
- (e) 依微擾理論, 以電磁波來激發電子態, 使電子態由  $m$  狀態遷移至  $k$  狀態之最大機率時, 電磁波頻率應為何?

4. (每小題 5 分, 共 15 分) 金屬鈉之自由電子平均密度為  $n = 2.65 \times 10^{22}$  electrons/cm<sup>3</sup>, 波茲曼常數 (Boltzmann's constant) =  $1.38 \times 10^{-16}$  erg-deg<sup>-1</sup>, 試求鈉金屬

- (a) Fermi energy (in ev)
- (b) Fermi temperature
- (c) Lattice constant

5. (每小題 5 分, 共 10 分) 若氦 (Helium) 原子之電子狀態為 1s2s, 寫出

- (a) Singlet 及 Triplet 之 spin eigenfunctions
- (b) 完整的反對稱波函數 (antisymmetric complete eigenfunctions)

6. (每小題 5 分, 共 10 分) 若原子的電子組態分別為 (1) 1p2d 與 (2) 2p<sup>2</sup>, 試寫出 (1) 及 (2) 電子之所有量子態。【以光譜學符號表示之 (spectroscopic notation)】

7. (5 分) 以測不準原理 (uncertainty principle), 估算  $\pi$  介子 ( $\pi$ -meson) 之質量。(註: Planck's constant =  $6.63 \times 10^{-27}$  erg-sec)