國立中山大學115學年度
碩士班考試入學招生考試試題

科目名稱：基礎數學【應數系碩士班甲組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶書籍、紙張（應考證不得做計算紙書寫）、具有通訊、記憶、傳輸或收發等功能之相關電子產品或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

國立中山大學115學年度碩士班考試入學招生考試試題

科目名稱：基礎數學【應數系碩士班甲組】　　　　　　　　　　　　　　題號：424001
※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)　　　　　　　　共1頁第1頁

答題時，每題都須寫下題號與步驟。請依題號順序作答，不會作答題目請寫下題號並留空白。

1. (10%) Find the limit: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \sin(t^2)dt}{x\cdot sin(x^2)}$

2. (10%) Evaluate the following integrals:

   (a) (5%) $\int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x^2+6x-7}}dx$

   (b) (5%) $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sin(\frac{x}{y})\, dydx$

3. (15%) Derive the Maclaurin series of $f(x) = cos(x)$ and $g(x) = cos(3x^2)$. In addition, calculate $g^{(12)}(0)$.

4. (10%) Evaluate the following sum of double integrals:

$$\int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-y^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dxdy + \int_0^1 \int_{1-y}^1 \frac{x+y}{x^2+y^2} dxdy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dydx$$

5. (15%) Let the ordered basis for P_3 (the space of polynomial of degree at most 3) be $B = \{x^3, x^2, x, 1\}$ and let $T: P_3 \to P_3$ be defined by $T(p(x)) = \frac{d}{dx}p(x)$.

   (a) (10%) Find the matrix representation A of T with respect to the basis B.

   (b) (5%) Use A to find $T(3x^3 - 2x^2 + 5x - 10)$.

6. (20%) Let A be a real 3×3 matrix having eigenvalues $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ with the corresponding eigenvectors $x_1 = (1,0,0)^T, x_2 = (0,1,2)^T, x_3 = (0,1,1)^T$.

   (a) (10%) Give a basis for the null space and the column space of A.

   (b) (10%) Find all solutions x to the equation $Ax = x_2 - 3x_3$.

7. (20%) Find the values of b for which the following integral converges for the following two cases:

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-ax}}{x^b(1+x^3)} dx$$

   (a) (10%) If $a = 0$.

   (b) (10%) If $a > 0$.

試題請隨卷繳回，請留意背面是否有題

國立中山大學115學年度
碩士班考試入學招生考試試題

科目名稱：機率與統計【應數系碩士班甲組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶書籍、紙張（應考證不得做計算紙書寫）、具有通訊、記憶、傳輸或收發等功能之相關電子產品或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

- Please answer the questions in order and write down the question number for each question. If you are not able to answer the question, leave it blank.
- Notations: i.i.d., independent and identically distributed.

1. (15%) Let the random variable X be defined by $X = YZ$, where Y and Z are independent random variables each taking on the values -1 and 1 with probability 0.5. Show that X is independent of Y, but not of $Y - Z$.

2. (15%)Assume $X_1, \ldots, X_n$ are i.i.d. random variables with $E[X_1] = \mu$, $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$, $E[(X_1-\mu)^3] = \mu_3$, $E[(X_1-\mu)^4] = \mu_4$, where the constants μ, σ^2, μ_3, and μ_4 are finite with $\mu_4 > \sigma^4$. Show that

$$\frac{\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2)}{\sqrt{\mu_4 - \sigma^4}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

where $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$.
(In this question, you can use the result of the weak law of large number, the central limit theorem, and the Slutsky's theorem.)

3. (20%) Let $Z_1, \ldots, Z_k$ be i.i.d. random variables distributed as $N(0,1)$. Consider the linear transformation

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{k}} & \frac{1}{\sqrt{k}} & \frac{1}{\sqrt{k}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{k}} \\ \frac{1}{\sqrt{2\times 1}} & -\frac{1}{\sqrt{2\times 1}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3\times 2}} & \frac{1}{\sqrt{3\times 2}} & -\frac{2}{\sqrt{3\times 2}} & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}} & \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}} & \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_k \end{pmatrix} = \mathbf{CZ}.$$

   (a) (5%) Show that $Y_1, \ldots, Y_k$ are independent and identically distributed from $N(0,1)$.
   (b) (15%) Use the result in (a) to show that the sample mean $\bar{Z} = k^{-1}\sum_{i=1}^{k} Z_i$ and the sample variance $S^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(Z_i - \bar{Z})^2$ are independent.

4. (30%) Let $X_1, X_2, \ldots, X_n, n > 3$, be a random sample from the uniform distribution over $(\theta - 1, \theta + 1)$ having p.d.f.

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2} I_{(\theta-1,\theta+1)}(x), \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Suppose that we have two estimators for θ:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)}) \quad \text{and} \quad \tilde{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

   (a) (5%) Find the sufficient statistics for θ.
   (b) (10%) Within $\{\hat{\theta}, \tilde{\theta}\}$, which one can be the MLE for θ ? Why ?
   (c) (15%) Compare the two estimators $\hat{\theta}$ and $\tilde{\theta}$ in terms of the MSE (mean squared error).

國立中山大學 115 學年度碩士班考試入學招生考試試題

科目名稱：機率與統計【應數系碩士班甲組】　　題號：424006

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)　　共 2 頁第 2 頁

5. (20%) Let $U_1, \ldots, U_n$ be random sample from the uniform distribution on the unit interval. For $r < s$, let $U_{(r)}$ and $U_{(s)}$ be the rth and the sth ordered statistics, respectively, so that $U_{(1)} \leq U_{(1)} \leq \cdots \leq U_{(n)}$.

   (a) (10%) Find the expression of $E(U_{(r)}^k)$, for positive integer $k \geq 1$.

   (b) (10%)Find the expression of $\operatorname{Cov}(U_{(r)}, U_{(s)})$.

– End –

國立中山大學115學年度
碩士班考試入學招生考試試題

科目名稱：線性代數乙【應數系碩士班乙組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶書籍、紙張（應考證不得做計算紙書寫）、具有通訊、記憶、傳輸或收發等功能之相關電子產品或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

國立中山大學 115 學年度碩士班考試入學招生考試試題

科目名稱：線性代數乙【應數系碩士班乙組】　　　　題號：424002

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)　　　　共 1 頁第 1 頁

Please write down all the detail of your computation and proof.

1. (15%) Find a lower triangular matrix L with all diagonal elements 1 and an upper triangular matrix U such that
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = UL.$$

2. (15%) Let A be an $n \times n$ Hermitian positive semidefinite matrix. Prove that there exists a unique Hermitian positive semidefinite square root matrix B of A such that $B^2 = A$.

3. (15%) Let $m \times n$ matrix A be the matrix representation of linear transformation L. Show that (1) L is one-to-one $\Longleftrightarrow$ all columns of A are linearly independent, (2) L is onto $\Longleftrightarrow$ all rows of A are linearly independent.

4. (15%) Let A be an $m \times n$ real matrix with $m > n$. Prove that $\mathbf{x}_0$ is a least squares solution of $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Longleftrightarrow A\mathbf{x}_0$ is the projection of $\mathbf{b}$ onto range space of $A \Longleftrightarrow A^tA\mathbf{x}_0 = A^t\mathbf{b}$.

5. (20%) Consider the Fibonacci sequence $y_{n+1} = y_n + y_{n-1}$ for $n = 1, 2, \cdots$ with $y_0 = 0$ and $y_1 = 1$. Find the matrix A satisfying
$$\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{bmatrix}.$$
Diagonalize A and use it to obtain the explicit exact formula of y_n.

6. (20%) Let $\|\cdot\|_v$ be an vector norm on $\mathbf{C}^n$. Prove that
$$|||A|||_v = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v}$$
is a matrix norm and is compatible with $\|\cdot\|_v$.

國立中山大學115學年度
碩士班考試入學招生考試試題

科目名稱：微積分【應數系碩士班乙組、海科系碩士班乙組選考】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶書籍、紙張（應考證不得做計算紙書寫）、具有通訊、記憶、傳輸或收發等功能之相關電子產品或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

計算題：共 7 題，子題分數平均分配。答題時，每題都必須寫下題號與詳細步驟。

[1]. (14%) Evaluate the following limits.

(a) $\lim_{n\to\infty} (4^n + 5^n)^{1/n}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{5}{\sqrt{3n^2-1^2}} + \frac{5}{\sqrt{3n^2-2^2}} + \cdots + \frac{5}{\sqrt{3n^2-n^2}}\right]$

[2]. (16%) Evaluate the following integrals

(a) $\int_0^\infty (3-x)e^{-2x}\,dx$　　(b) $\int_{-1}^2 |x^2-2x|\,dx$

[3]. (14%)

Let $f(x) = e^{\sin x} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} + \int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt$. Find $f'(x)$ and $f''(x)$.

[4]. (12%) Solve the initial value problem:

$$\begin{cases} y' = -y + 2x \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

[5]. (14%) Find the arc length of the curve $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ from $x = 1$ to $x = e$.

[6]. (16%) Consider the Cartesian integral

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2}{2+x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

(a) Change to an equivalent polar integral.
(b) Evaluate the polar integral.

[7]. (14%) Find the local maximum value and saddle point(s) of

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y.$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝全卷完＝＝＝＝＝＝＝＝＝

試題請隨卷繳回，請留意背面是否有題

國立中山大學115學年度
碩士班考試入學招生考試試題

科目名稱：線性代數丙【應數系碩士班丙組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶書籍、紙張（應考證不得做計算紙書寫）、具有通訊、記憶、傳輸或收發等功能之相關電子產品或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

科目名稱：線性代數丙【應數系碩士班丙組】 題號：424003

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題) 共1頁第1頁

- Provide complete solutions, including all necessary computations and rigorous justification.

1. (20%) Find bases of the null and range of the linear map $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ given by
$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2,\ x_2 - x_3,\ x_1 + 3x_2 - x_3).$$

2. (20%) Suppose $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Find an orthogonal matrix Q with positive determinant and a diagonal matrix D such that $Q^T AQ = D$.

3. (20%) Let $\langle\ ,\ \rangle$ be an inner product on the vector space V and $e_1, \ldots, e_m$ be orthonormal vectors in V. Denote by $||v||$ the norm of $v \in V$. Show that
$$\sum_{i=1}^{m} |\langle v, e_i\rangle|^2 \le ||v||^2,$$
for every $v \in V$.

4. (20%) Suppose V is a finite dimensional vector space over $\mathbb{C}$, and T is a linear map from V to itself. If the minimal polynomial $p(x)$ of T is of degree n, and $k \in \mathbb{C} - \{0\}$. Determine the minimal polynomial of the linear map kT in terms of n, k and $p(x)$.

5. (20%) Let $\mathcal{P}_2$ be the vector space of polynomials of degree at most two with real coefficients and $\mathcal{P}_2'$ be the vector space of linear maps from $\mathcal{P}_2$ to $\mathbb{R}$. Find the basis $\{v_0, v_1, v_2\}$ of $\mathcal{P}_2'$ such that
$$v_i(x^j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \ne j \end{cases}, \text{ for every } 0 \le i, j \le 2.$$

國立中山大學115學年度
碩士班考試入學招生考試試題

科目名稱：高等微積分【應數系碩士班丙組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶書籍、紙張（應考證不得做計算紙書寫）、具有通訊、記憶、傳輸或收發等功能之相關電子產品或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

國立中山大學115學年度碩士班考試入學招生考試試題

科目名稱：高等微積分【應數系碩士班丙組】 題號：424004

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題) 共1頁第1頁

1. [10%] Let (M,d) be a metric space. In this question, you will be asked to state some definitions.
   i. [5%] Let $K \subset M$ be a compact set. Write down the definition of a compact set.
   ii. [5%] Let $I \subset M$ be a connected set. Write down the definition of a connected set.

2. [30%] In this question, we will study compact sets.
   i. [6%] State the Heine-Borel theorem.
   ii. [12%] Is it true that a compact set in a metric space is always closed and bounded? Justify your assertion.
   iii. [12%] Is it true that a closed and bounded set in a metric space is always compact? Justify your assertion.

3. [20%] Let $f(x) := \begin{cases} sin(115/x) & if \quad x \neq 0 \\ 0 & if \quad x = 0 \end{cases}$. Answer the following questions.
   i. [5%] Find $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. Justify your assertion.
   ii. [5%] Find $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. Justify your assertion.
   iii. [2%] In light of your answers above, what is the limit of f as x approach to 0?
   iv. [8%] Let $I := \{(x, f(x)) : x \geq 0\}$.
      a. [4%] Is I a connected set? Justify your assertion.
      b. [4%] Is I a path-connected set? Justify your assertion.

4. [10%] Let Q denote the set of rational numbers. Let $f(x) := \begin{cases} 115 & if \quad x \in Q \\ 0 & if \quad x \notin Q \end{cases}$
   i. [5%] Show that f is not continuous on $[0,1]$.
   ii. [5%] Show that f is not Riemann integrable on $[0,1]$.

5. [10%] Let f be continuous on $[0,1]$. Suppose that $\int_0^1 f(x)x^n\,dx = 0$ for $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Show that $f(x) = 0$ for all $x \in [0,1]$.

6. [10%] Suppose that $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a uniformly bounded sequence of Riemann integrable functions on $[a,b]$. Let $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$, where $a \leq x \leq b$. Show that F_n admits a uniformly convergent subsequence on $[a,b]$.

7. [10%] Let $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Is the function f invertible near $(1,1)$? Justify your assertion.