國立中山大學112學年度
碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：基礎數學【應數系碩士班甲組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答(不得另攜帶紙張，亦不得使用應考證空白處作為計算紙使用)。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

國立中山大學112學年度碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：基礎數學【應數系碩士班甲組】　　題號：424001

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)　　共1頁第1頁

答題時，每題都必須寫下題號與詳細步驟。請依題號順序作答，不會作答題目請寫下題號並留空白。

1. (10%) Evaluate $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2e^x}{e^{x^2}}$

2. (10%) Evaluate $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_0^{x^2+1}\tan\theta\,d\theta\right]$

3. (10%) Evaluate $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\frac{dx}{\cos x}$

4. (10%) Evaluate $\displaystyle\int_0^3\int_{x/3}^{(x+6)/3} x(3y-x)e^{(3y-x)^2}\,dydx$

5. (10%) Evaluate $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

6. (10%) Find the point closest to the origin on the curve of intersection of the plane $y+2z=3$ and the cone $z^2=x^2+y^2$.

7. (15%) Let T be the endomorphism of $\mathbb{R}^3$ defined by $\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} a-b\\ -a+2b+c\\ -2a+b-c\end{bmatrix}$.
   Find the eigenvalues of T and, for each eigenvalue, find the associated eigenvector such that its length equals to 1.

8. (10%) Let $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ be two matrices with $a_{ij}, b_{ij}>0$, $1\le i,j\le n$. Define
$$\kappa(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\ln a_{ij}-a_{ij}\ln b_{ij}-a_{ij}+b_{ij}\right).$$
   Prove that $\kappa(A,B)\ge 0$.

9. (15%) Let $a_n\ge 0$ for all $n\in\mathbb{N}$. Prove that $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converges if and only if $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$ converges.

～全卷完～

國立中山大學112學年度
碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：微積分【應數系碩士班乙組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答(不得另攜帶紙張，亦不得使用應考證空白處作為計算紙使用)。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

國立中山大學112學年度碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：微積分【應數系碩士班乙組】　　　　　　　　　　　　題號：424002

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)　　　　　共1頁第1頁

1. (10 %) Prove or disprove that $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

2. (5 %) Let $F(x)=\displaystyle\int_{\cos 2}^{x^3}\cos t\,\mathrm{d}t$, find derivative of $F(x)$.

3. (10 %) Evaluate the definite integral

$$\int_{\sqrt{3}}^{3}\frac{1}{x\sqrt{4x^2-9}}\,\mathrm{d}x.$$

4. (10 %) Find $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{\sin x^2}$.

5. (a) (5 %) Find $\displaystyle\int\frac{3^{2x}}{1+3^{2x}}\,\mathrm{d}x$.

   (b) (10 %) Evaluate the improper integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}}$.

6. (10 %) State the Integral Test and apply it to determine the convergence or divergence of the series: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

7. (10 %) Find the arc length of the curve given by parametric equations $x=\arcsin t$ and $y=\ln\sqrt{1-t^2}$, $0\le t\le\frac{1}{2}$.

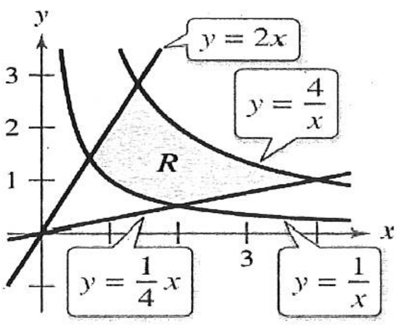
8. (10 %) Find the area of the inner loop of $r=1+2\sin\theta$.

9. (10 %) Find the volume of the solid inside $x^2+y^2+z^2=16$ and outside $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

10. (10 %) Use the change of variables to evaluate the given double integral

$$\iint_R e^{-xy/2}\,\mathrm{d}A,$$

where R is the region given in the picture on the right.



~End~

試題請隨卷繳回，請留意背面是否有題

國立中山大學112學年度
碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：線性代數丙【應數系碩士班丙組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答(不得另攜帶紙張，亦不得使用應考證空白處作為計算紙使用)。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

科目名稱：線性代數丙【應數系碩士班丙組】

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)

題號：424003

Show details of your calculation and proof.

(1) [15%] Find the general solution of the following nonhomogeneous system.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 &= -1 \end{aligned}$$

(2) [20%] Let $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$. Find an invertible matrix P and a diagonal matrix D such that $P^{-1}AP = D$.

(3) [15%] Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Find bases for the null and the column spaces of A.

(4) [15%] Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$. Find $A^5 + A^4 - 11A^3 - 8A^2 + 20A - 6I$ where I is the 2×2 identity matrix.

(5) [15%] Let $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ given by $T[(x,y)^t] = (x+y, 2x-y)^t$. Find the matrix representation of T with respect to the basis $B = \{(1,1)^t, (1,0)^t\}$. Here $(x,y)^t$ denotes the transpose of (x,y).

(6) [20%] Find

(a) [6%] the characteristic and minimal polynomials of $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$,

(b) [6%] the Jordan form J of A, and

(c) [8%] an invertible matrix P such that $P^{-1}AP = J$.

End of Paper

國立中山大學 112 學年度
碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：高等微積分【應數系碩士班丙組】

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答(不得另攜帶紙張，亦不得使用應考證空白處作為計算紙使用)。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

科目名稱：高等微積分【應數系碩士班丙組】 題號：424004
※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題) 共1頁第1頁

There are total **100** points. Justify your answer appropriately to get a full mark for the question. Write down the question number for each question, and leave it blank if you are not able to answer the question.

1. (10 points) Define
$$f(x) = \begin{cases} 2023 & \text{if } \; x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{if } \; x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$
where $\mathbb{Q}$ is the set of all rational numbers. Show that f is nowhere continuous on $\mathbb{R}$.

2. (10 points) Suppose that $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of real-valued functions that converge uniformly to f on $\mathbb{R}^m$. Show that if f_n are continuous, then f is a continuous function on $\mathbb{R}^m$.

3. (10 points) Consider the vector-valued function $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ defined by
$$F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$
Show that F is not invertible but locally invertible everywhere on $\mathbb{R}^2$.

4. (15 points) Let
$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$
Show that F is not differentiable at $(0, 0)$, but all directional derivatives of F exist.

5. (15 points) Show that
$$S(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2023nxyz)}{n!}$$
defines a continuous function on $\mathbb{R}^3$.

6. (20 points) State and prove the Weierstrass M-test.

7. (20 points) Let
$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{if } x \in (0, 1]; \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$
Show that the graph of f is connected but not path connected on $\mathbb{R}^2$.

國立中山大學 112 學年度
碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：線性代數乙【應數系碩士班乙組】

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答(不得另攜帶紙張，亦不得使用應考證空白處作為計算紙使用)。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

國立中山大學 112 學年度碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：線性代數乙【應數系碩士班乙組】　　題號：424005

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)　　共 1 頁第 1 頁

計算與證明題：共 6 題。答題時，每題都必須寫下題號與詳細步驟。

1. (16 pts)

   (a) (8 pts) Let $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Assume that $(a-d)^2 + 4bc > 0$. Show that A is diagonalizable.

   (b) (8 pts) Let $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}$. Find all eigenvalues and their corresponding eigenspaces.

2. (16 pts) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) (6 pts) Determine the dimension of the column space of A.

   (b) (10 pts) Find an orthonormal basis for the column space of A.

3. (16 pts) Let $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ be the matrix of a linear transformation $T : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ with respect to the bases $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ and $\beta' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ to $\mathbb{R}^{2\times 1}$ and $\mathbb{R}^{3\times 1}$, where

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) (6 pts) Find $T(\mathbf{u}_1)$ and $T(\mathbf{u}_2)$.

   (b) (10 pts) Find a formula for $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$.

4. (20 pts) Let $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ be the null space of A and $R(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}\}$ be the range of A. Show that $\dim N(A) + \dim R(A) = n$.

5. (16 pts) Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Let $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ be distinct eigenvalues of A and $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ be eigenvectors corresponding to $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$. Show that $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m\}$ is linearly independent.

6. (16 pts) Let $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ and A_{*i} $(1 \le i \le n)$ denote the i-th column of A. Show that $\{A_{*1}, \cdots, A_{*n}\}$ is linearly independent if and only if $A^T A$ is invertible.

~ END ~

國立中山大學112學年度
碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：機率與統計【應數系碩士班甲組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答(不得另攜帶紙張，亦不得使用應考證空白處作為計算紙使用)。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

國立中山大學 112 學年度碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：機率與統計【應數系碩士班甲組】 題號：424006

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題) 共1頁第1頁

1. (10%) At the game of craps, the player rolls two fair dice.
   - If the sum is 7 or 11 then the player wins.
   - If the sum is 2, 3 or 12 then the player loses.
   - If the sum is anything else, the player continues rolling the dice until the sum is either that number again, in which case the player wins, or 7, in which case the player loses.

   Find the probability of winning at the game of craps.

2. (20%) Three evenly matched players A, B and C play a series of games. The winner of each game plays the next game with the waiting player until a player wins two games in a row and is declared the overall winner. Find the probability that each of the three players is the overall winner assuming that A and B play the first game.

3. (20%) Assume that the husbands and wives of n married couples are randomly paired for a dance. We say that a match occurs each time a husband is paired with his wife. Find the probability of the event that there is no match.

4. (20%) Let $X_1, \ldots, X_n$ be independent identically distributed random variables with probability density function
$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\exp[-(1+\frac{1}{\lambda})\ln(x)]$$
where $\lambda > 0$ and $x \geq 1$. Find the maximum likelihood estimator of λ.

5. (10%) The number of defects per yard, Y, of a certain fabric is known to have a Poisson distribution with parameter λ. However, λ is a random variable with probability density function
$$f(\lambda) = e^{-\lambda} I(\lambda > 0)$$
where I is the indicator function.
   a) (5%) Find E(Y).
   b) (5%) Find Var(Y).

6. (20%) Suppose that $X_1, \ldots, X_n$ are independent identically distributed Bernoulli(p) where $n \geq 2$ and $0 < p < 1$ is the unknown parameter. Derive the uniformly minimum-variance unbiased estimator (UMVUE) of $v(p)$, where $v(p) = e^2(p(1-p))$.