國立中山大學111學年度
碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：基礎數學【應數系碩士班甲組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。** 請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答(不得另攜帶紙張)。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

國立中山大學 111 學年度碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：基礎數學【應數系碩士班甲組】　　題號：424001

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)　　共 1 頁第 1 頁

共十題，每題 10 分。答題時，每題都必須寫下題號與詳細步驟。
請依題號順序作答，不會作答題目請寫下題號並留空白。

1. (10%) Find the limits
   (a) (5%) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+4\cdot 1^2}+\frac{n}{n^2+4\cdot 2^2}+\frac{n}{n^2+4\cdot 3^2}+\cdots+\frac{n}{5n^2}\right)$.
   (b) (5%) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{\sqrt[3]{1+h}}\sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.
2. (10%) Find the highest and the lowest points of the curve given by $x^2+xy+2y^2=28$.
3. (10%) Evaluate the integral $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.
4. (10%) Derive the Maclaurin series of $\tan^{-1} x$.
5. (a) (5%) Find the length of the curve in polar coordinates: $r=\sqrt{1+\sin 2\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$.
   (b) (5%) Find the area enclosed by the curve given in (a).
6. (10%) Find the local extreme values and saddle points of $f(x,y)=x^2y-xy^2+xy-y^2$.
7. (10%) Evaluate $\displaystyle\int_0^4\int_{\frac{y}{2}}^2 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
8. (10%) Let
$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&-4&8\\1&2&0&2&8\\2&4&-3&10&9\\3&6&0&6&9\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&2&0&2&5\\0&0&3&-6&3\\0&0&0&0&-7\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$
   Assume that A is row equivalent to B. Find bases for the null space of A and the column space of A.
9. (10%) Use the factorization $A=\begin{bmatrix}a&0\\a(a-b)&b\end{bmatrix}=PDP^{-1}$ to compute A^k, where k represent an arbitrary positive integer.
10. (10%) Classify the quadratic form $3x_1^2-4x_1x_2+6x_2^2$. Then make a change of variable, $\mathrm{x}=P\mathrm{y}$, that transforms the quadratic form into one with no cross-product term. Write the new quadratic form.

國立中山大學111學年度
碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：機率與統計【應數系碩士班甲組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答(不得另攜帶紙張)。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

國立中山大學 111 學年度碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：機率與統計【應數系碩士班甲組】 題號：424006
※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題) 共1頁第1頁

※共七題。請依題號順序作答，不會作答的題目請寫下題號並留空白。

Notation: iid: identically independently distributed; CDF: cumulative distribution function; pdf: probability density function; MLE: maximum likelihood estimator; Z is the standard normal distribution and z_α is the right tail cut-off for standard normal distribution; that is, $P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$. If the distribution of X is Unif[0,1], then the pdf of X $f(x) = 1$ if $0 \leq x \leq 1$; $f(x) = 0$ otherwise. $\ln(x) = \log_e(x)$. If Y is a Poisson random variable with parameter λ, then $P(Y = y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}, y = 0, 1, 2, 3, \ldots$

1. [15%] Assume $X_1, \ldots, X_n$ are iid Unif[0,1]. Let $T = 2\sum_{i=1}^n \ln(X_i)$ Please derive the pdf of T.

2. [15%] Let $X_1, \ldots, X_n$ be iid continuous random variables with common CDF $F(x) = P(X_1 \leq x)$. Let s and t be two constants and $s < t$ and let $U = F(t) - F(s)$. We know that $\hat{U} = \sum_{i=1}^n \frac{I_{\{s \leq X_1 \leq t\}}}{n}$, where I is the indicator function, is a nonparametric estimator for U.
(a)(10%) Please derive the asymptotic distribution of $\sqrt{n}(\hat{U} - U)$. (Note: Express your result using U)
(b)(5%) Use the result of (a) to derive the $1 - \alpha$ asymptotic confidence interval for U. Express your answer using z_α and $\hat{U}$.

3. [15%] Suppose that, conditional on N, X has binomial distribution with N trials and probability p of success and that N is a Poisson random variable with parameter λ. Please derive the marginal distribution (unconditional distribution) of X.

4. [15%] X is a random variable. Under the null hypothesis, the cumulative distribution function (CDF) of X is $F_0(x) = x^3$ for $x \in [0, 1]$ and under the alternative hypothesis the CDF of X is $F_1(x) = x^2$ for $x \in [0, 1]$.
Please compute the power of the likelihood ratio test for significance level α.

5. [15%] Let X be $N(\theta, \theta^2)$ random variables (i.e., mean of X is θ and variance is θ^2. Please derive the MLE for θ. Note that θ must be greater than 0.

6. [15%] Let $X_1, \ldots, X_n$ be a random sample from the distribution with probability density function $f(x)$. Let $f(x) = \frac{2x}{\theta^2}$ if $0 < x < \theta$; $f(x) = 0$ otherwise. Let $T = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$. We consider using CT to estimate θ, where C is a constant greater than 0. Determine the constant C so that the mean square error of CT is the smallest.

7. [10%] Assume Y is a random variable with a Poisson distribution with parameter λ. However, λ is a random variable with pdf

$$f(\lambda) = e^{-\lambda} I_{\{\lambda > 0\}},$$

where I is the indicator function. Please calculate $Var(Y)$.

國立中山大學111學年度
碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：微積分【應數系碩士班乙組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答(不得另攜帶紙張)。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

國立中山大學 111 學年度碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：微積分【應數系碩士班乙組】 題號：424002

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題) 共 1 頁第 1 頁

共 8 題，每題都必須寫下題號與詳細計算步驟

1. (a) (5%) Show that $f(x) = \int_1^x \sqrt{2+3t^2}\, dt$ is one-to-one;

   (b) (5%) Find $(f^{-1})'(0)$.

2. Evaluate the following limits:

   (a) (8%) $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} \right)$; (b) (8%) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n^2+2^2} + \dfrac{n}{n^2+4^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+(2n)^2} \right)$.

3. Find the following integrals:

   (a) (7%) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x-4}}$; (b) (7%) $\int \arctan x dx$.

4. Let $I_n = \int_0^\infty \dfrac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}} dx$, for $n \geq 1$.

   (a) (10%) Prove that $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+3} I_n$, for $n \geq 1$.

   (b) (5%) Evaluate $\int_0^\infty \dfrac{x^5}{(x^2+1)^6} dx$.

5. (10%) Find the relative extrema and saddle points of the function

$$f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4.$$

6. (10%) Evaluate the double integral $\int\int_R e^{-x^2} dA$, where R is the triangular region with vertices $(0,0), (1,0), (1,1)$.

7. (10%) Solve the differential equation $y' + y\tan x = \sec x + \cos x$ with $y(0) = 1$.

8. (a) (12%) Find a power series for $\ln(1+x)$ centered at 0 and determine its interval of convergence;

   (b) (3%) Assume that the series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n}$ converges to A. Find A.

==== 全卷完 ====

國立中山大學111學年度
碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：線性代數乙【應數系碩士班乙組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答(不得另攜帶紙張)。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

國立中山大學 111 學年度碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：線性代數乙【應數系碩士班乙組】 題號：424005

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題) 共 1 頁第 1 頁

計算與證明題：共6題，子題分數平均分配。答題時，每題都必須寫下題號與詳細步驟。

[1]. (16%) Let

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

(a) Solve the linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for $\mathbf{x}$.

(b) Compute $\det(A)$.

[2]. (16%) Let $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ be defined by

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 5x_1 - 4x_3 \end{bmatrix}.$$

(a) Find a matrix A such that $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for each $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ in $\mathbb{R}^3$.

(b) Let $\beta = ([1, 0, 1], [1, 1, 0], [1, 1, 1])$ be an ordered basis of $\mathbb{R}^3$.
Find the matrix representation $B = [L]_\beta$ of L with respect to β.

[3]. (14%) Find the projection matrix onto the plane $2x - y - 3z = 0$ in $\mathbb{R}^3$.

[4]. (14%) Find a linear function that is the best least squares fit to the data

x	-2	-1	0	1
y	-1	1	2	2

[5]. (24%) Let $A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 9 & -8 \end{bmatrix}$.

(a) Is A diagonalizable?

(b) Find the characteristic polynomial of A^{20}.

(c) Find the eigenvalues of A^{22}.

(d) Find the minimal polynomial of A.

(e) Find the minimal polynomial of A^{14}.

(f) Find the Jordan form of A.

[6]. (16%) Let $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ and $C = AB$. Show that

(a) If A and B both have linearly independent column vectors,
then the column vectors of C will be also linearly independent.

(b) The column space of C is a subspace of the column space of A.

========= 全卷完 =========

國立中山大學111學年度
碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：線性代數丙【應數系碩士班丙組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答(不得另攜帶紙張)。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

國立中山大學111學年度碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：線性代數丙【應數系碩士班丙組】　　　　題號：424003

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)　　　　共1頁第1頁

* When f is a polynomial, the notation f' stands for its derivative.

1. [20%] Let $\mathcal{P}_2$ be the vector space of all polynomials of degree at most 2 with real coefficients. Define the function $f : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ by $f(p) = p - xp' + p''$. Find a basis of range(f).

2. [20%] Let $\mathcal{M}_{2,4}$ be the vector space of all 2×4 real matrices and O the 2×4 zero matrix. Let
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Show that
$$V = \{X \in \mathcal{M}_{2,4} : AX - XB = O\}$$
is a vector space and find a basis of V.

3. [20%] Let
$$A_x = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{bmatrix}$$
and $f(x) = \det(A_x)$. Find $f'(0)$.

4. [20%] Let A be an $n \times n$ complex matrix with distinct eigenvalues $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$. For each $i = 1, \ldots, q$, the eigenspaces of λ_i is $E_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)$. Show that $\{E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_q}\}$ is linearly independent.

5. [20%] Show that every $n \times n$ complex matrix A has a decomposition $A = QTQ^*$ such that Q is a unitary matrix and T is an upper-triangular matrix, where Q^* is the conjugate transpose of Q.

國立中山大學111學年度
碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：高等微積分【應數系碩士班丙組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答(不得另攜帶紙張)。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

國立中山大學111學年度碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：高等微積分【應數系碩士班丙組】 **題號：424004**

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題) 共1頁第1頁

Please show all the details.

1. Show that $f(x) = \frac{1}{x}$ is not uniformly continuous on $(0,1)$. (10 points)
2. (i) Find the closed form and the interval of convergence of $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$. (10 points)
   (ii) Find the value of $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \cdots$. (10 points)
3. Let $0 < c < 1$. Show that $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}c^n = 0$ by using
   (i) L'Hôpital's rule (5 points)
   and (ii) any other method. (5 points)
4. Show that the following series are uniformly convergent.
   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}(x^2 + n^2)$ on $[-5,5]$. (Hint: Use M-test.) (10 points)
   (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$ on $[0,1]$. (10 points)
5. Let $B_2(a) \subset \mathbb{R}^n$ be the open ball centered at a with radius 2. Consider a C^2 function $f: B_2(a) \to \mathbb{R}$ with $f(a) = 0$ and $\|\nabla f\|(a) = 1$. Suppose that $0 \le Hess(f)(v,v) \le 2$ in $B_2(a)$ for all unit vectors v, where $Hess(f) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]$ is the Hessian matrix of f. Show that $-2 \le f \le 6$ in $B_2(a)$. (10 points)
6. Show that a bounded monotone function $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ is integrable. (10 points)
7. For what values of $c \in \mathbb{R}$ is the integral $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^c} dx$ convergent? (10 points)
8. Let K be a nonempty closed set in $\mathbb{R}^n$ and $x \in \mathbb{R} \setminus K$. Prove that there is a $y \in K$ such that $d(x,y) = \inf\{d(x,z) | z \in K\}$. Is this true for open sets? (10 points)