

國立中山大學 110 學年度 碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：機率與統計【應數系碩士班甲組】

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

- 考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- 答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

國立中山大學 110 學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：機率與統計【應數系碩士班甲組】

題號：424006

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)

共 2 頁第 1 頁

※共八題。請依題號順序作答，不會作答的題目請寫下題號並留空白。

1. [10%] The probability density function of a random variable Z is

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{if } -2 < z < 2; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Find the cumulative distribution function of $S = Z^2$.

2. Please explain the following terms.

- a. [4%] What is a 95% confidence interval?
- b. [4%] What is p -value?
- c. [4%] What is the “parameter” of a Student’s t -distribution?

3. In a tough training program, 120 students take a series of courses. The number of students having X failed subjects is listed in the following table.

X	0	1	2	3	4
number of students	8	18	32	42	20

The teacher had a theory that the probability of $X = x$ is $P(x) = \binom{4}{x}\theta^x(1 - \theta)^{4-x}$; $x = 0, 1, 2, 3, 4$ with an unknown θ . After some calculation, the teacher found the maximum likelihood estimator of θ to be 0.6. Apply an appropriate statistical test to see whether the teacher’s theory is in accordance with the observed data. Please specify

- a. [4%] the null hypothesis and the alternative hypothesis,
- b. [4%] the test statistic (no need to simplify your answer),
- c. [4%] the sampling distribution of the test statistic under the the null hypothesis.

4. [10%] An online poll states that 50% people dislike a certain policy. For the next poll on the same topic, let \hat{p} be the point estimate of the true proportion p_0 . How large a sample size is required such that a 95% confidence interval for p_0 will be $\hat{p} \pm 2.5\%$? (Note: $\Phi(1.96) \approx 0.975$, $\Phi(1.64) \approx 0.95$, $\Phi(1.28) \approx 0.90$, where $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ is the cumulative distribution function of a standard normal random variable Z . And $1.96^2 = 3.8416$, $1.64^2 = 2.6896$, $1.28^2 = 1.6384$.)

5. [16%] Fill in the cells (a)~(e) on the incomplete analysis of variance table below from a one way randomized design. Also write down (f) the null hypothesis, (g) the alternative hypothesis, and (h) the conclusion for the F test using a significance level of 5%.

Source of Variation	Sum of Squares (SS)	Degrees of Freedom (df)	Mean Squares (MS)	F value	Pr(>F)
Between groups	(a)	2	(e)	8	0.01
Within groups	(b)	(d)	4		
Total	(c)	11			

國立中山大學 110 學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：機率與統計【應數系碩士班甲組】

題號：424006

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)

共 2 頁第 2 頁

※共八題。請依題號順序作答，不會作答的題目請寫下題號並留空白。

6. Let Y_1, Y_2, \dots, Y_k be a random sample of size k having the following density function

$$f(y; \alpha) = e^{-(y-\alpha)}, y \geq \alpha,$$

and $f(y; \alpha) = 0$ otherwise.

- a. [7%] Find a method of moments estimator for α in terms of the sample mean.
 - b. [7%] Find the maximum likelihood estimator for α .
7. [10%] Suppose that a vector \mathbf{x} consists of two random variables as $\mathbf{x} = (X_1, X_2)^T$, whose 2×2 variance-covariance matrix is $\mathbf{V} = \text{var}(\mathbf{x})$, i.e., $V_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$; $i, j = 1, 2$. Let $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$ be a given vector of known weights. Prove that the variance of the random variable $Y = w_1X_1 + w_2X_2$ is $\text{var}(Y) = \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}$.

8. The probability mass function $P(X = x)$ of a geometric random variable X is

$$\theta(1 - \theta)^x$$

for $x = 0, 1, \dots$ and $0 < \theta \leq 1$. Consider a random sample of size n and answer the following questions.

- a. [8%] Find sufficient statistics for θ .
- b. [8%] Find the Cramér-Rao lower bound for the variance of any unbiased estimate of θ .

國立中山大學 110 學年度 碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：基礎數學【應數系碩士班甲組】

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

- 考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- 答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

國立中山大學110學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：基礎數學【應數系碩士班甲組】

題號：424001

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)

共 1 頁 第 1 頁

答題時，每題都必須寫下題號與詳細步驟。請依題號順序作答，不會作答題目請寫下題號並留空白。

1. Evaluate the follows.

(a)(5%) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$ (b)(5%) $\int_1^2 \operatorname{arcsec} x dx$ (c)(10%) $\int_0^{\pi/4} (\sec^3 x - \tan x^3) dx$

2. (10%) Find the area inside $r = \sin \theta$ and outside $r = \sin 2\theta$.

3. (15%) Let x be the number of units of labor (at \$200 per unit), y be the number of units of capital (at \$3200 per unit), and $P(x, y) = 100\sqrt[3]{xy^2}$ be the production function. Find the minimum cost of producing 50000 units of a product.

4. Let $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ be given by

$$T(x, y, z, w) = (7x + y + 2z + 2w, x + 4y - z - w, -2x + y + 5z - w, x + y + 2z + 8w).$$

(a) (5%) Find all eigenvalues of T .

(b) (10%) Find the Jordan normal form of T .

5. (20%) Find the range of a such that the function

$$f_a(x) = \begin{cases} |x|^a \sin \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

is differentiable on \mathbb{R} .

6. (20%) For each positive integer n , let $f_n(x)$ be defined on $[0, 1]$ by

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{if } 0 \leq x \leq 1/n; \\ \frac{n}{n-1}(1-x) & \text{if } 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$

For each $x \in [0, 1]$, find the limit of $\{f_n(x)\}$ and state your reason.

全卷完

試題請隨卷繳回，請留意背面是否有題

國立中山大學 110 學年度 碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：線性代數乙【應數系碩士班乙組】

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

- 考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- 答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

國立中山大學 110 學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：線性代數乙【應數系碩士班乙組】

題號：424005

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)

共 1 頁第 1 頁

計算與證明題：共6題，子題分數平均分配。答題時，每題都必須寫下題號與詳細步驟。

[1]. (13%) Show that the eigenvectors associated with the distinct eigenvalue are linearly independent.

[2]. (15%) Find real numbers a, b such that the linear system

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = b \\ 2x + ay - 2z = 1 \\ 5x + 6y + 7z = 1 \end{cases}$$

has (1) no solution, (2) a unique solution, (3) infinitely many solutions.

[3]. (14%) Let $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ and $C = AB$.
Show that $\text{rank}(C) \leq \min \{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$.

[4]. (16%) Let $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_3y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3$,
where $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ and $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$.

(a) Find a matrix A such that $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$.

(b) Does $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define an inner product on \mathbb{R}^3 ? Explain your answer.

[5]. (21%) Let $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Find the characteristic polynomial of A .

(b) Find a Jordan form of A .

(c) Find a matrix P such that $P^{-1}AP$ is the Jordan form in (b).

[6]. (21%) Let W be the subspace of \mathbb{R}^4 spanned by $\mathbf{x}_1 = (4, 2, 2, 1)^T$, $\mathbf{x}_2 = (2, 0, 0, 2)^T$
and $\mathbf{x}_3 = (1, 1, -1, 1)^T$.

(a) Find an orthonormal basis for W .

(b) Find the projection matrix onto W .

(c) Compute the projection of $\mathbf{v} = (1, 1, 0, 1)^T$ on W .

===== 全卷完 =====

國立中山大學 110 學年度 碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：微積分【應數系碩士班乙組】

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

- 考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- 答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

國立中山大學 110 學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：微積分【應數系碩士班乙組】

題號：424002

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)

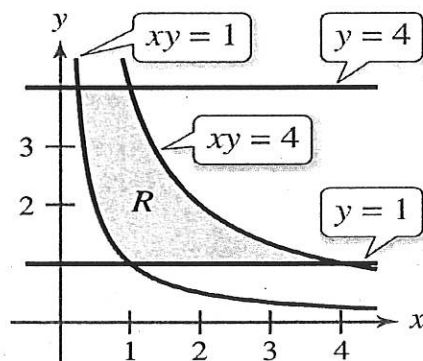
共 1 頁第 1 頁

~本卷滿分 100 分，共 9 題~

1. (10 %) Prove or disprove that $|\tan \frac{x}{2} - \tan \frac{y}{2}| \geq \frac{|x-y|}{2}$ for $x, y \in (-\pi, \pi)$.
2. (5 %) Let $F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{t} dt$, find derivative of $F(x)$.
3. (10 %) Use Riemann sum to find the definite integral $\int_1^3 (2x^2 - 3x) dx$.
4. (10 %) Find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$, where a, b are constant real numbers.
5. (a) (5 %) Find $\int \sec^3 x dx$
 (b) (10 %) Evaluate the improper integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$.
6. (10 %) State the Integral Test and apply it to determine the convergence or divergence of the series: $\sum_{n=4}^{\infty} n^2 e^{-n}$.
7. (20 %) Find the length of $r = 1 + \cos \theta$ and area of its interior region.
8. (10 %) Find the volume of the solid inside both $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ and $(x-3)^2 + y^2 = 9$.
9. (10 %) Use the change of variables to evaluate the given double integral

$$\iint_R y \, dA,$$

where R is the region given in the picture on the right.



~全卷完~

國立中山大學 110 學年度 碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：高等微積分【應數系碩士班丙組】

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

- 考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- 答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

國立中山大學 110 學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：高等微積分【應數系碩士班丙組】

題號：424004

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)

共 1 頁第 1 頁

Let \mathbb{R} be the set of all real numbers, \mathbb{Q} be the set of all rational numbers and \mathbb{N} be the set of all positive integers.

- (10 points) Is $\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \sup\{q \in \mathbb{Q} | q^k \leq r\} = \mathbb{R}$? State your reason.
- (10 points) Show that $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
- (15 points) Is \sqrt{x} uniformly continuous on \mathbb{R} ? Prove your assertion.
- (15 points) Show that $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ is a differentiable function on \mathbb{R} . Is the derivative $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a continuous function?
- (20 points) Show that $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converges conditionally.
- (10 points) Let $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, be a sequence of increasing functions, i. e., $f_n(x) \leq f_n(y)$ for all $x, y \in [0,1]$ and $n \in \mathbb{N}$. Assume that $f_n \leq f_{n+1}$ and $|f_n(x)| \leq 1$ for all $x \in [0,1]$ and $n \in \mathbb{N}$. Show that f_n converges (pointwisely) to an increasing function.
- (10 points) Can you find a C^1 function $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\nabla f(x,y) = (-y, x)$ for all $(x,y) \in \mathbb{R}^2$? Find such a function or prove that it does not exist.
- (10 points) Construct a function $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ such that f_x and f_y exist at $(0,0)$ but f is not differentiable at $(0,0)$.

國立中山大學 110 學年度 碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：線性代數丙【應數系碩士班丙組】

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

- 考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- 答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

國立中山大學 110 學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：線性代數丙【應數系碩士班丙組】

題號：424003

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)

共 1 頁第 1 頁

1. [10%] Let $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ be a linearly independent set in some vector space over \mathbb{C} . Find all value(s) of $k \in \mathbb{C}$ for which the set $\{v_1 + kv_2, v_2 + kv_3, v_3 + kv_4, v_4 + kv_1\}$ forms a linearly independent set.

2. [30%] Let S be the set of solutions to the system of linear equations

$$\begin{aligned}x - 2y + z &= 0 \\2x - 3y - z &= 0.\end{aligned}$$

- (1) Prove that S is a subspace of \mathbb{R}^3 .
 - (2) Find a basis for this subspace S .
 - (3) What is the dimension of S ?
 - (4) Let $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ be a linearly independent subset of S . What is the possible maximal value of n ?
3. [15%] Let T be the linear transform on the set $M_n(\mathbb{R})$ of $n \times n$ matrices over \mathbb{R} defined as $T(A) = (A + A^t)/2$, where A^t stands for the transpose of $A \in M_n(\mathbb{R})$. Find all eigenvalues of T .
4. [15%] Find the Jordan form of the matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. [15%] Let $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be linear so that its matrix representation under some basis of \mathbb{R}^3 is

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2021 \end{pmatrix}.$$

Show that there is no trivial invariant subspace for T .

6. [15%] Let $T: V \rightarrow V$ be a linear map, where V is a vector space with dimension n . Suppose that there exists some vector $v \in V$ satisfying $T^{n-1}v \neq 0$ and $T^n v = 0$. Show that with respect to some basis of V , T has the matrix representation of the form

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

End of Paper