國立中山大學 109 學年度
碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：高等微積分【應數系碩士班丙組】

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。** 請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

國立中山大學109學年度碩士班暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：高等微積分【應數系碩士班丙組】 題號：424004
※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機（問答申論題） 共 1 頁第 1 頁

All variables are real numbers. n denotes natural numbers.

1. (15%) Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be a continuous and strictly increasing function. Suppose that the inverse function f^{-1} exists. Show that f^{-1} is Riemann integrable on $[f(a), f(b)]$.

2. (15%) Does $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-nx}$ converge for all $x \in [0,1]$? Show your reason.

3. (15%) Suppose that a sequence of differentiable functions $f_n : (-a,a) \to \mathbb{R}$ converges to a differentiable function $f : (-a,a) \to \mathbb{R}$ uniformly. Does $f'(0) = \lim_{n\to\infty} f_n'(0)$? Prove it or give a counter-example.

4. (15%) Find $c \in \mathbb{R}$ such that $\left|c - \sin\frac{1}{10}\right| < 0.0001$.

5. (20%) Let $F : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ and $F(x,y) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{xy} |\sin t|\, dt$.
(i) Is F continuous with respect to x and y? Show your reason.
(ii) Is F differentiable with respect to x and y? Show your reason. If it is, find $\frac{\partial F}{\partial x}$.

6. (10%) Use Green's formula to show that the area of a bounded closed regular domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ equals $\int_{\partial\Omega} x dy$.

7. (10%) Find a function $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ such that f' exists only at $x = 0$, i.e., f is differentiable at 0 and is not differentiable elsewhere.

試題請隨卷繳回

國立中山大學 109 學年度
碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：線性代數【應數系碩士班丙組】

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

國立中山大學 109 學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：線性代數【應數系碩士班丙組】 題號：424003

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題) 共1頁第1頁

1. [10%] Let $\mathcal{P}_2$ be the space of all polynomials with real coefficients and of degree at most 2. Define a function $f : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ by $f(p(x)) = (p(1), p(2), p(3))^\top$ for any polynomial $p(x) \in \mathcal{P}_2$. Determine whether f is a linear map or not, and justify your answer.

2. [15%] Let A be an $m \times n$ real matrix and $\mathbf{x}$ a vector in $\mathbb{R}^n$. Show that $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ if and only if $A^\top A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

3. [15%] Let $V = \{(x, y, z, w)^\top : x + y + z + w = 0\}$. Determine the dimension of V and find an orthonormal basis of V. (A basis is orthonormal if its vectors are of length one and mutually orthogonal.)

4. [20%] Suppose (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 4$, are four given points in $\mathbb{R}^2$ such that $x_1, \ldots, x_4$ are distinct. Show that there exists a unique polynomial of degree at most 3 that passes through these four points.

5. [20%] Let A_n be the $n \times n$ matrix whose i, j-entry is 1 if $i \neq j$ and 0 if $i = j$. Compute $\det(A_n)$ as a function of n.

6. [20%] A real symmetric matrix is positive definite if all of its eigenvalues are positive. Suppose A is a real symmetric matrix and P is a positive definite matrix. Show that each eigenvalue of PA is real.

國立中山大學109學年度
碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：線性代數【應數系碩士班乙組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

國立中山大學 109 學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：線性代數【應數系碩士班乙組】 題號：424005

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題) 共 1 頁第 1 頁

計算與證明題：共6題，子題分數平均分配。答題時，每題都必須寫下題號與詳細步驟。

[1]. (14%) Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ be a matrix whose eigenvalues are less than 1 in magnitude. Show that $(I-A)^{-1}$ exists.

[2]. (20%) Find a Jordan canonical form for the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

[3]. (14%) Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ be a singular matrix and $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ be a nonsingular matrix. Prove that AB has the same eigenvalues as BA.

[4]. (16%) Find the projection matrix onto the plane $2x - y - z = 0$ in $\mathbb{R}^3$.

[5]. (18%) Let P_3 be the set of all polynomials with degree less than 3. Let L be the operator on P_3 defined by

$$L(p(x)) = xp'(x) + \left(x^2+2\right)p''(x).$$

(a) Find the matrix A representing L with respect to the ordered basis $[1, x, x^2]$.

(b) Find the matrix B representing L with respect to the ordered basis $[1, 2x. x^2+2x]$.

(c) Find the matrix S such that $B = S^{-1}AS$.

[6]. (18%) Let

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Find orthonormal bases for the range of A^T.

(b) Find orthonormal bases for the nullspace of A.

(c) Compute $\|A\|_2$.

========= 全卷完 =========

國立中山大學109學年度
碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：微積分【應數系碩士班乙組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

國立中山大學 109 學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：微積分【應數系碩士班乙組】　　題號：424002

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)　　共 1 頁第 1 頁

Please write down all the detail of your computation and solution.

1. (25%) Evaluate (1) (8%) $\lim_{n\to\infty}(\pi^n+\sqrt{10}^{\,n})^{1/n}$, (2) (8%) $\int_0^e \ln x\,dx$, (3) (9%) $\frac{d}{dx}\int_{\log_2|\sec x|}^{x^x}\sin t^5\,dt$.
2. (15%) Find the general solution of differential equation $2x^2y'(x)+y^3(x)=2xy(x)$.
3. (15%) Compute the Taylor series for $\arcsin x$ at $x=0$. What is its radius of convergence?
4. (15%) Let C be the intersection curve of two surfaces $x^2y^2+2x+z^3=16$ and $3x^2+y^2-2z=9$. Find the tangent line of C at $(2,1,2)$.
5. (15%) Find all saddle points, relative maxima and minima of $f(x,y)=2xy+1-(x^4+y^2)/2$. Use second partials test to prove your results.
6. (15%) Use a double integral in rectangular coordinates to compute the volume of unit ball.

國立中山大學109學年度
碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：機率與統計【應數系碩士班甲組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

國立中山大學109學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：機率與統計【應數系碩士班甲組】 題號：424006
※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題) 共2頁第1頁

答題時，每題都必須寫下題號與詳細步驟。請依題號順序作答，不會作答題目請寫下題號並留空白。

1. Consider the following two groups of students: Group 1 consists of students who spend less than \$1000 per week on food; Group 2 comprises students who spend over \$3000 per week on food. Let p_1 and p_2 equal the proportions of students in these two groups, respectively, who believe that food is expensive. If 1615 out of a random sample of 2020 students from group 1 and 182 out of random sample 303 from group 2 believe that food is expensive.
(a)(10%) Give a point estimate of $p_1 - p_2$.
(b)(10%) Find an approximate 90% confidence interval for $p_1 - p_2$.

2. Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a random sample of size n from the distribution with the probability density function $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}x^{(1-\theta)/\theta}$, $0 < x < 1$ and $1 < \theta < \infty$.
(a)(10%) Find the maximum likelihood estimator (MLE) of θ^2.
(b)(10%) Is the MLE of θ^2 unbiased? Why?
(c)(10%) Find the Rao-Cramér lower bound for the variance of an unbiased estimator of θ.

3. Let X follow the normal distribution with mean μ and variance 144. To test $H_0: \mu = 70$ vs. $H_1: \mu > 70$, let the critical region be defined by $C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{36}) : \bar{x} \geq 73\}$, where $\bar{x}$ is the sample mean of a random sample of size $n = 36$ from this distribution.
(a) (10%) What is the power function of μ for this test.
(b) (10%) If $\bar{x} = 73.41$, find the p-value.

4. (10%) Let $\{A_n\}$ be a sequence of events. Show that if $P(A_n) = 1$ for all $n = 1, 2, \ldots$, then $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.

5. (10%) Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be independent random variables with $\Pr(X_i = 1) = p = 1 - \Pr(X_i = 0)$. Let $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ and $P_n = \Pr(Y_n \text{ is not an odd number})$. Show that

$$P_n - P_{n-1} = p(1 - 2P_{n-1}), \qquad n \geq 1.$$

6. (10%) Assume that X is a positive continuous random variable having a nonincreasing probability density function $f(x)$, $x > 0$. Show that

$$x^2 f(x) \leq 2E(X), \qquad x > 0.$$

國立中山大學109學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：機率與統計【應數系碩士班甲組】 題號：424006

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)

Cumulative Standard Normal Distribution $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	z
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359	0.0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753	0.1
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141	0.2
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517	0.3
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879	0.4
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224	0.5
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549	0.6
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389	0.9
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621	1.0
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830	1.1
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015	1.2
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177	1.3
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319	1.4
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441	1.5
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545	1.6
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633	1.7
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706	1.8
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767	1.9
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817	2.0
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857	2.1
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890	2.2
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916	2.3
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936	2.4
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952	2.5
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964	2.6
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974	2.7
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981	2.8
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986	2.9
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990	3.0
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993	3.1
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995	3.2
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997	3.3
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	3.4
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	3.5
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	3.6
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	3.7
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	3.8
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	3.9
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	z

國立中山大學109學年度
碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：基礎數學【應數系碩士班甲組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

國立中山大學109學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

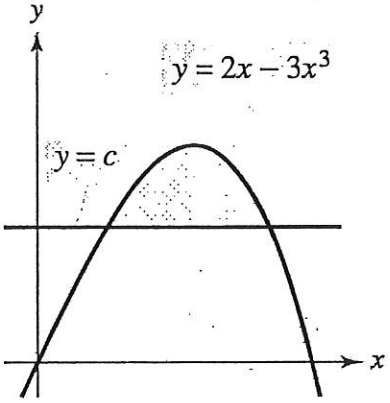
科目名稱：基礎數學【應數系碩士班甲組】 題號：424001

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題) 共2頁第1頁

共十題，每題10分。答題時，每題都必須寫下題號與詳細步驟。
請依題號順序作答，不會作答題目請寫下題號並留空白。

1. (a) (5%) Use an approximate Riemann sum to evaluate the limit
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$
   (b) (5%) Evaluate the limit $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_2^{2+h}\sqrt{2+\sqrt{2+t}}\,dt$.

2. The horizontal line $y=c$ intersects the curve $y=2x-3x^3$ in the first quadrant as shown in the figure. Find c so that the areas of the two shaded regions are equal.



3. Find the indefinite $\int\frac{e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}\,dx$.

4. Determine whether the series $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln n}$ converges conditionally or absolutely, or diverges.

5. Use Lagrange multipliers to find any extrema of the function $f(x,y)=x^2+3xy+y^2$ subject to the constraint $x^2+y^2\le 1$.

6. Find the area of the surface given by $z=f(x,y)=7+2x+2y$ over the region $R=\{(x,y):x^2+y^2\le 4\}$.

7. Let A be a 2×2 matrix with eigenvalues 3 and $1/3$ and corresponding eigenvectors $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ and $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$. Let $\{\mathbf{x}_k\}$ be a solution of the difference equation $\mathbf{x}_{k+1}=A\mathbf{x}_k$, $\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix}9\\1\end{bmatrix}$.
   (a) (5%) Compute $\mathbf{x}_1=A\mathbf{x}_0$.
   (b) (5%) Find a formula for $\mathbf{x}_k$ involving k and the eigenvectors $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$.

8. Find the equation $y=\beta_0+\beta_1 x$ of the least-squares line that best fits the given data points: $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,2)$.

9. Let A and B be symmetric $n \times n$ matrices whose eigenvalues are all positive. Show that the eigenvalues of $A + B$ are all positive.

10. Find the change of variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ that transforms the quadratic form $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ into $\mathbf{y}^T D\mathbf{y}$ as shown $5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3 = 9y_1^2 + 6y_2^2 + 3y_3^2$.