國立中山大學108學年度
碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：機率與統計【應數系碩士班甲組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

國立中山大學 108 學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：機率與統計【應數系碩士班甲組】
※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)

題號：424006
共 1 頁第 1 頁

Notation: pdf: probability density function; cdf: cumulative distribution function; i.i.d.; identically independently distributed. z_α is the value that cuts off a right tail of area α in the standard normal distribution. $t_{\alpha,df}$ is the value that cuts off a right tail of area α in the t distribution with degree of freedom df.

1. (10%) An automobile insurance company has a policy that reimburses a loss up to a benefit limit of 10. This is to say that if the loss is under 10, then the loss is fully paid. If the loss is more than 10, then only 10 is paid.

   Assume that the loss of a policyholder, X, follows a distribution with the pdf $f(x) = 2x^{-3}$ if $x > 1$; $f(x) = 0$, otherwise.

   Please calculate the expectation of the benefit paid by the insurance company under the policy described above.

2. (20%, 10% each) $X_1, \ldots, X_n$ are i.i.d. continuous random variables with pdf $f(x)$ and cdf $F(x)$. Define the survival function $S(x) = P(X_1 > x)$ and empirical survival function $S_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n I_{\{X_i > n\}}}{n}$, where $I_{\{.\}}$ is the indicator function. Let $u < v$. Please answer the following questions. (a) Calculate $Cov(S_n(u), S_n(v))$. (b) Find the asymptotic joint distribution of $\sqrt{n}(S_n(u) - S(u))$ and $\sqrt{n}(S_n(v) - S(v))$.

3. (20% 10% each) $X_1, \ldots, X_n$ are i.i.d. random variables with uniform distribution on [3,6] (i.e. Unif[3,6]). Denote the order statistic by $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}$. (a) Please calculate the variance of $X_{(k)}$.
   (b) Please prove that $X_{(n)}$ converges to 6 in probability.

4. (20%, 10% each) $X_1, \ldots, X_n$ are i.i.d. normal random variables with unknown mean μ_1 and unknown variance σ^2. $Y_1, \ldots, Y_n$ are i.i.d. normal random variables with unknown mean μ_2 and unknown variance σ^2. $Z_1, \ldots, Z_n$ are i.i.d. normal random variables with unknown mean μ_3 and unknown variance σ^2. Let $\bar{X}, \bar{Y} and \bar{Z}$ are the sample means for μ_1, μ_2 and μ_3, respectively. (a) Please derive the likelihood ratio test for testing the null hypothesis $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ against the alternative hypothesis that at least one of the means is different from others.
   (b) Please calculate the $100(1-\alpha)\%$ confidence interval for $\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3$.

5. (15%) Let X and Y are i.i.d. normal random variables with mean μ and variance σ^2. $Z = X + 3Y$. Please find $f(Z)$ so that $E[(X - f(Z))^2|Z]$ reaches minimum ($f(Z)$ is a function of Z). Please express your answer using μ and σ and Z.

6. (15%) $X_1, \ldots, X_n$ are i.i.d. normal random variables with mean μ and variance σ^2. To estimate σ^2, for what value of c does $c\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ has the smallest mean squared error? Prove your answer.

國立中山大學108學年度
碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：線性代數【應數系碩士班乙組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

國立中山大學 108 學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：線性代數【應數系碩士班乙組】
※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)

題號：424005
共 1 頁第 1 頁

計算與證明題：共7題，子題分數平均分配。答題時，每題都必須寫下題號與詳細步驟。

[1]. (16%) Determine the nullspace of the matrix.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

[2]. (14%) Given the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

(a) Compute the LU factorization of A.

(b) Compute $\det(A)$.

[3]. (14%) Let A and B be $n \times n$ matrices.

(a) Show that $AB = O$ if and only if the column space of B is a subspace of the nullspace of A.

(b) Show that if $AB = O$, the sum of the ranks of A and B is not bigger than n.

[4]. (12%) Let $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ and $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^m$, and let x_0 be a particular solution to the system $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$.
Prove that a vector $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ is a solution to $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ if and only if $\mathrm{y} = \mathrm{x}_0 + \mathrm{z}$, where z is in the nullspace of A.

[5]. (18%) Let

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Find the characteristic polynomial.

(b) Find the eigenvalues and the corresponding eigenvectors.

(c) Find a matrix C and a diagonal matrix D such that $D = C^{-1}AC$.

[6]. (14%) Find the best least squares fit by a linear function to the data

x	-1	0	1	2
y	0	1	3	9

[7]. (12%) Let $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ and show that

(a) $\|\mathrm{x}\|_1 \leq n\,\|\mathrm{x}\|_\infty$ (b) $\|\mathrm{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|\mathrm{x}\|_\infty$

======== 全卷完 ========

試題請隨卷繳回

國立中山大學 108 學年度
碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：高等微積分【應數系碩士班丙組】

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

- **考試開始響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

科目名稱：高等微積分【應數系碩士班丙組】 題號：424004

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題) 共 1 頁第 1 頁

1. [15%] Let $\mathbb{N}$ be the set of all positive integers. Consider a set of numbers $A = \{1+\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
   i. [8%] Find $\sup A$ and $\limsup A$.
   ii. [7%] Is A closed in $\mathbb{R}$? State your reason.
2. [10%] What is an equivalence relation?
3. [10%] Is $\mathbb{R}$ a compact set? State your reason.
4. [10%] Let $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be the step function such that, for any integer k, $\alpha(x) = 2k$ if and only if $k \le x < k+1$. Evaluate the Riemann-Stieltjes integral $\int_0^4 x \, d\alpha$.
5. [10%] Find two divergent infinite series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ such that both $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)$ and $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ converge.
6. [15%]
   i. [6%] Find the limit function of the sequence of functions $f_k(x) = x^k$, $x \in [0,1]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.
   ii. [9%] Does $f_k(x)$ converge uniformly on $[0,1)$ as $k \to \infty$? State your reason.
7. [15%]
   i. [8%] Suppose $y > 0$. Show that $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin x \, dx = \frac{1}{1+y^2}$. (Hint: use the integration by parts.)
   ii. [7%] Use (i) and $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ to find the function $F(y) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$.
8. [15%]
   i. [8%] Find a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that both $\frac{\partial}{\partial x} f$ and $\frac{\partial}{\partial y} f$ exist at the origin $(0,0)$ but f is not differentiable at $(0,0)$. (You don't need to state your reason.)
   ii. [7%] In your example, are $\frac{\partial}{\partial x} f$ and $\frac{\partial}{\partial y} f$ both continuous at $(0,0)$? State your reason.

國立中山大學108學年度
碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：基礎數學【應數系碩士班甲組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

國立中山大學108學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：基礎數學【應數系碩士班甲組】 題號：424001

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題) 共1頁第1頁

共十題，每題10分。答題時，每題都必須寫下題號與詳細步驟。

請依題號順序作答，不會作答題目請寫下題號並留空白。

1. Find the eigenvalues of the linear transformation $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ given by $f(x, y, z) = (3y - z, x - y + 2z, 4z)$.

2. Let $f(x) = \displaystyle\int_1^{\operatorname{arcsec} x} \sqrt{t}\, dt$. Find $f'(2)$.

3. Evaluate $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx$.

4. Evaluate $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2}\, dxdy$.

5. Evaluate $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\, dzdydx$.

6. Evaluate $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x}}{x}\, dx$.

7. Find the absolute extrema of $f(x, y) = e^{-2x^2-2xy^2-5y^4-6x+6y^2-8}$.

8. Find the points on the surface $xy - z^2 = -3$ that are closest to the origin.

9. Find the interval of convergence of $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k(\ln k)^2}$.

10. Determine the convergence or divergence of $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$.

試題請隨卷繳回

國立中山大學 108 學年度
碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：微積分【應數系碩士班乙組】

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

- **考試開始響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

科目名稱：微積分【應數系碩士班乙組】　　題號：424002

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)　　共 1 頁第 1 頁

Please write down all the detail of your computation and solution.

1. (10%) Evaluate $\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t \frac{1}{2}(s-t)^2 f(s)ds$.

2. (10%) Evaluate $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}$.

3. (10%) Use the definition of derivative to compute $\frac{d}{dx}\cos x$.

4. (10%) Let n be an integer, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ and $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Compute ∇r^n for $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ and express it in terms of $\mathbf{r}$ and r.

5. (15%) Plot the graph of $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$ and indicate all its asymptotes, inflection points and relative maximum and minimum points.

6. (15%) Compute the Taylor series of $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ at $x = 0$. What is its interval of convergence?

7. (15%) Solve the differential equation $xy'(x) = y^3(x)$ with $y(0) = 1$. What is its solution if $y(0) = -1$?

8. (15%) Find the volume of the solid region bounded by the surface $x^2 + 2y^2 + z = 4$ and the xy-plane.

國立中山大學 108 學年度
碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：線性代數【應數系碩士班丙組】

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

- **考試開始響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

國立中山大學108學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：線性代數【應數系碩士班丙組】　　　　題號：424003
※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)　　　　共1頁第1頁

1. [10%] Let $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} \right\}$ be a set of matrices. Determine whether S is an independent set or a dependent set in the vector space of all 2×2 real matrices.

2. [15%] Let
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ and } R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
It is known that R is the reduced echelon form of A. Find a matrix E such that $EA = R$.

3. [15%] Let A and B be two $n \times n$ matrices. Then $p(t) = \det(A + tB)$ is a polynomial in t. Suppose B is invertible. Show that $p(t)$ is a polynomial of degree n.

4. [20%] Let
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -4 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$
Let $N(A)$ and $N(B)$ be the null spaces of A and B, respectively. Find a basis for $N(A) \cap N(B)$.

5. [20%] Let $\mathcal{P}_2$ be the vector space of all polynomials with degree at most 2 and with coefficients in $\mathbb{R}$. Then $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ and $\mathcal{B}_2 = \{1, x-1, (x-1)^2\}$ are two bases of $\mathcal{P}_2$. Thus, every polynomial $p \in \mathcal{P}_2$ can be written as
$$p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)^2$$
for some a_0, a_1, a_2 and b_0, b_1, b_2. Find the matrix A such that
$$A \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$
for every $p \in \mathcal{P}_2$.

6. [20%] Let
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Find the eigenvalues of A, including the multiplicities.