

1. (5%) Determine the third-order Taylor series expansion of $\sin x$ with respect to x_0 .
2. (5%) Consider a function $f(x)$ defined as follows:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < 1 \\ 20, & x = 1 \\ 4, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Find $\int_0^2 f(x)dx$.

3. (12%) If vectors $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ and $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, evaluate
 - (a) The inner (scalar) product $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. [3%]
 - (b) The vector product $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. [3%]
 - (c) The component of \mathbf{a} in the direction of $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. [3%]
 - (d) The cosine of the angle between \mathbf{a} and \mathbf{b} . [3%]
4. (8%) Consider the function $f(x, y, z) = x^2 + 2y - ze^{xy}$.
 - (a) Find the gradient of the function f at the point $(1, 1, -1)$. [4%]
 - (b) Find the directional derivative of the function at the point $(1, 1, -1)$ in the direction of the vector $\mathbf{v} = (1, -2, 2)$. [4%]
5. (25%) Consider the following matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- (a) Find out its eigenvalues. [5%]
 - (b) Find out the corresponding eigenvectors. [5%]
 - (c) Construct a matrix \mathbf{P} with the corresponding eigenvectors as its columns, and then find its inverse \mathbf{P}^{-1} . [5%]
 - (d) Show that $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$ and $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$. [5%]
 - (e) Compute \mathbf{A}^5 . [5%]
6. (15%) Consider a function $f(x)$ defined as follows:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 10, & x = 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

- (a) Find the Fourier cosine series, and sketch the convergence of the series for $-4 \leq x \leq 4$. [5%]
- (b) Find the Fourier sine series, and sketch the convergence of the series for $-4 \leq x \leq 4$. [5%]
- (c) Find the complete Fourier series (including both sine and cosine series), and sketch the convergence of the series for $-4 \leq x \leq 4$. [5%]

Please pay particular attentions at where the function is discontinuous.

7. (15%) Consider the ordinary differential equation (ODE) with $\delta(t - 2\pi)$ as the nonhomogeneous term:

$$y'' + 4y' + 5y = \delta(t - 2\pi)$$

- (a) Show that $\int_0^\infty f(t)\delta(t - 2\pi)dt = f(2\pi)$. [10%]
 - (b) Solve the above ODE with initial conditions: $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. [5%]
8. (15%) Solve the following partial differential equation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0$$

with the boundary conditions: $u(0, t) = 10$, $u(1, t) = 100$, and initial condition $u(x, 0) = x$.

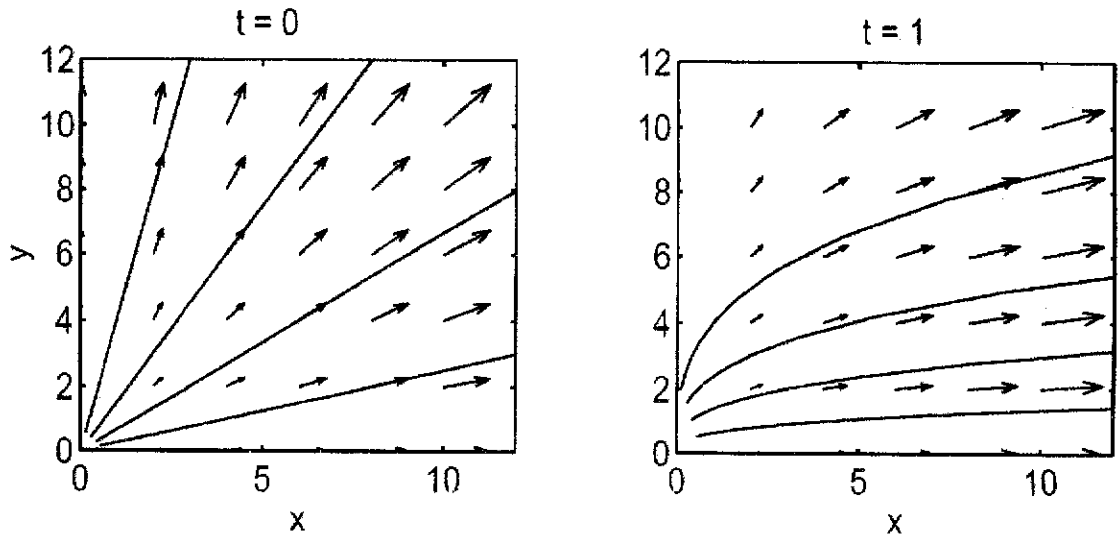
1. Vorticity (15%)

有一圓桶裝水後，以其圓心做剛體旋轉運動（即水對圓桶無相對速度），角速度 2π rad/sec，

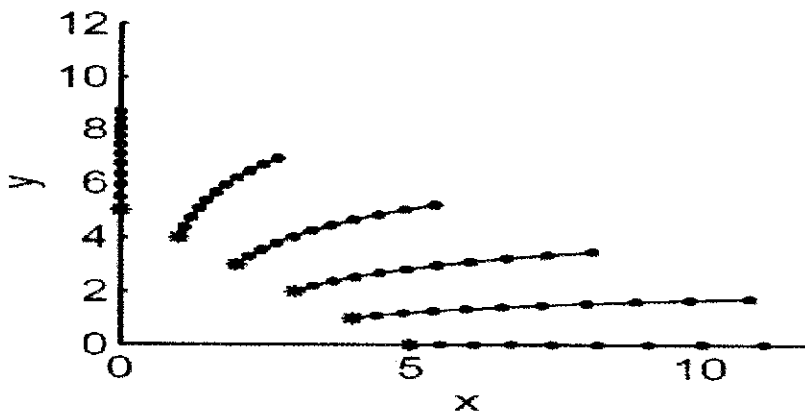
- (a) 求其速度分佈。(5%)
- (b) 求其 vorticity。(10%)

2. Fluid Kinematics (15%)

- (a) 在何種條件下，徑線(Pathlines or Trajectories)與流線(Streamlines)兩者一致？(5%)
- (b) 以下箭頭代表流速，圖中的線有何名稱？(5%)



- (c) 以下的點代表時間為 0 時位於星號位置的質點在後續時間的位置，圖中的線有何名稱？(5%)



3. 計算 (20%)

(a) 有一無限寬的渠道，坡度 $1/400$ ， $n=0.01$ ，水深 1.000 m，請以曼寧公式 (Manning equation) 求其流速 (概略估算即可，10%)。

(b) 水塔蓄水深 H ，底部有一長寬皆為 M 的方形開口。打開開口後，假設流速很快趨於穩定，此流速為何？(10%)

4. 計算 (25%)

有一小型火箭由靜止開始加速垂直升空，其初始重量為 $M_0 = 400$ kg。假設忽略空氣的阻力，而火箭燃料的燃燒速率是 $V_m = 5$ kg/s，噴射的速度則是相對於火箭的 $V_e = 3,500$ m/s。

(a) 計算火箭初始的加速度。

(b) 計算火箭發射 10 s 後的速度。

5. 計算 (25%)

一個 0.2 kg 重的球，由靜止的狀態，從高度 500 m 處自由落下，其承受空氣的阻力為 $F_D = kV^2$ ，而 $k = 2 \times 10^{-4}$ N · s²/m²。

(a) 計算球撞擊地面時的速度。

(b) 計算球的終端速度 (terminal speed)。

說明：本試卷共六題，六題之中請任選五題作答，至多不得超過五題。若答題超過五題，閱卷時將依答題次序僅評閱前五題，超過五題部分不予計分。每題 20 分，總分 100 分。

1. (20%) 有一 8° 斜坡上置放一個 10 kg 重的木塊。靜摩擦係數為 0.1 ，動摩擦係數為 0.09 。請問：
- (1) 要維持木塊不動，則 F 應有的範圍為多少？(10%)
 - (2) 要使木塊穩定以 0.1 m/sec 的速率在斜面上運動，請問外力 F 之功率為多少？(10%)

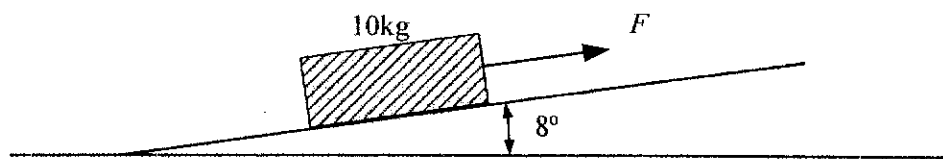


圖 1

2. (20%)

- (1) 求出圖 2(a) 中 F_1 和 F_2 的合力大小與合力方向。(5%)
- (2) 如圖 2(b) 所示，求出力量 F 在 O_a 和 O_b 兩軸的分量 F_a 和 F_b ，使得 $F = F_a + F_b$ 。(10%)
- (3) 求出圖 2(c) 中繩索 AB 和 AD 所受的張力大小。(5%)

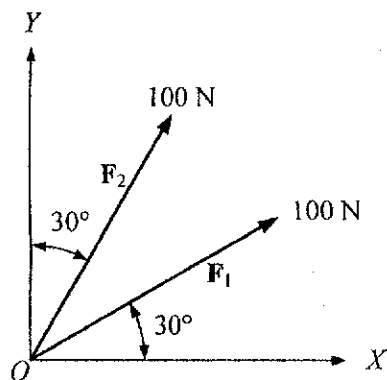


圖 2(a)

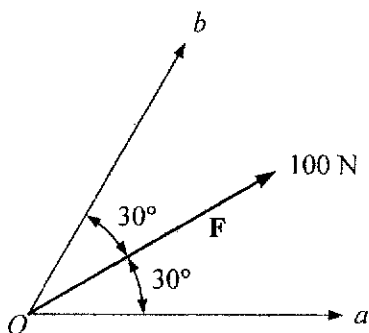


圖 2(b)

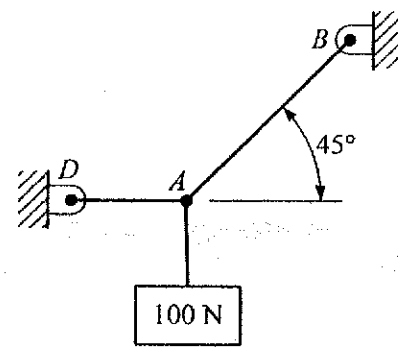


圖 2(c)

3. (20%)

- (1) 求出圖 3(a) 中力量 F 對 O 點產生的力矩大小。(10%)
- (2) 圖 3(b) 中的水杯 (含水) 共重 500 g ，其質心位於 G 點。如果有一垂直力量 F 作用於水杯邊緣，求出使得水杯瀕臨傾倒時的 F 作用力大小。(10%)

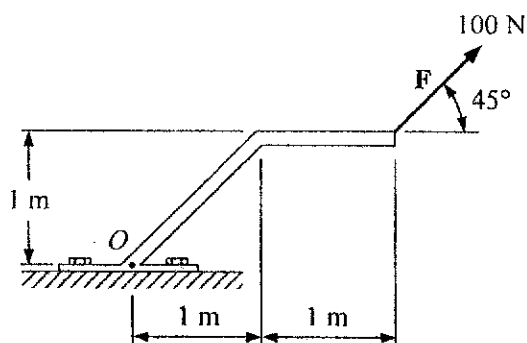


圖 3(a)

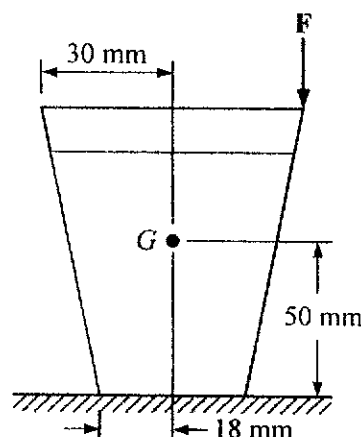


圖 3(b)

4. (20%) 投手與捕手之間的相對位置如圖 4 所示。

- (1) 如果投手將球以速率 $v = 10 \text{ m/s}$ 投出，球的投射角度 $\theta = 30^\circ$ ，請問球的初始速度在水平方向和垂直方向的分量各是多少？(5%)
- (2) 如果投手將球以投射角度 $\theta = 30^\circ$ 投出，請問球的初始速率 v 必須是多少，球才可以剛好進入捕手的手套中。(7%)
- (3) 如果投手將球以初始速率 $v = 30 \text{ m/s}$ 投出，球的投射角度為 θ 。為了使球可以剛好進入捕手的手套中，請問 $\tan \theta = ?$ (8%)

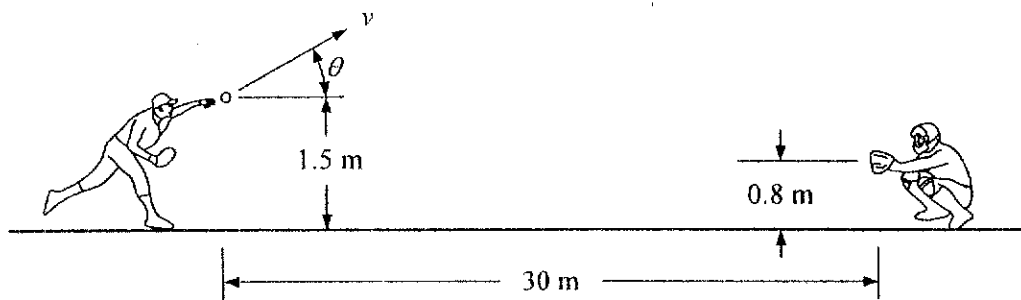


圖 4

5. (20%) 有一繩子，它的線性質密度 $L_m \text{ kg/m}$ ，抗張強度為 S 牛頓，吊掛在一電梯內自然下垂。請問：

- (1) 當電梯以 1 m/s 的速率穩定運動時，繩長多少還不會斷裂？(10%)
- (2) 當電梯以 1 m/s^2 的加速度運動時，繩長多少還不會斷裂？(10%)

6. (20%)

- (1) 如圖 6(a)所示，有三段鐵絲長度分別為 A 、 B 及 C ，線密度為 L_m 。 A (平行 y 軸) 在水平面上轉 90° 連接 B ， B (平行 x 軸) 在垂直面上轉 90° 後連接 C (平行 z 軸)。以 P 點為準，描述其質心的位置。(10%)
- (2) 如圖 6(b)所示，有一彎曲造型由線密度 L_m 的鐵絲構成，分別為半徑 R 、 $1/2R$ 、 $1/4R$ 的半圓構成 (OA , AB 及 BC)，請以 O 點為準，描述其質心的位置。(10%)

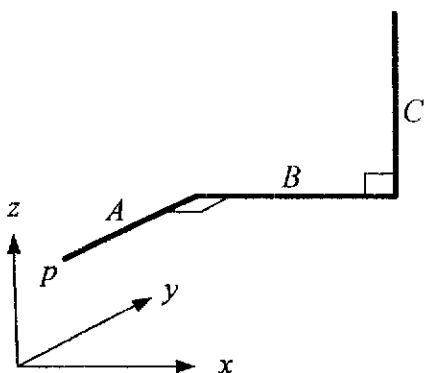


圖 6(a)

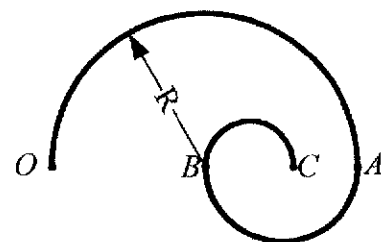


圖 6(b)

1. Assuming the op amp to be ideal, it is required to design the circuit shown in Fig. 1 to implement a current amplifier with gain $i_L/i_I = 20$ A/A. (a) Find the required value for R. (b) If $R_L = 1$ k Ω and the op amp operates in an ideal manner so long as v_O is in the range ± 12 V. What range of i_I is possible? (c) What is the input resistance of the current amplifier? (d) If the amplifier is fed with a current source having a current of 1 mA and a source resistance of 10 k Ω , find i_L . (16%)
2. Figure 2 shows a circuit that performs the high-pass single-time-constant function. Such a circuit is known as a first-order high-pass active filter. (a) Derive the transfer function and find the high-frequency gain and the 3-dB frequency ω_0 . (b) Design the circuit to obtain a high-frequency input resistance of 10 k Ω , a high-frequency gain of 40 dB, and a 3-dB frequency of 1000 Hz. At what frequency does the magnitude of the transfer function reduce to unity? (16%)
3. As shown in Fig. 3, a full-wave bridge rectifier circuit with a 1-k Ω load operates from a 120-V (rms) 60-Hz household supply through a 10-to-1 step-down transformer having a single secondary winding. It uses four diodes, each of which can be modeled to have a 0.7-V drop for any current. What is the peak value of the rectified voltage across the load? For what fraction of a cycle does each diode conduct? What is the average voltage across the load? (12%)
4. Figure 4 shows a discrete-circuit CS amplifier. If the transistor has $V_t = 1$ V, and $k'_n(W/L) = 2$ mA/V². (a) Find the DC bias V_{GS} , I_D , and V_D . (b) Find g_m and r_o if Early voltage $V_A = 100$ V. (c) Draw a complete small-signal equivalent circuit for the amplifier assuming all capacitors behave as short circuits at signal frequencies. (d) Find R_{in} and v_o/v_{gs} . (20%)
5. The purpose of this problem is to find the power dissipation of the inverter circuit of Fig. 5 in each of its two states. Assume that the component values are $V_{CC} = 5$ V, $R_C = 1$ k Ω , $R_B = 10$ k Ω , and $V_{BE} = 0.7$ V.
 - (a) With the input low at 0.2 V, the transistor is cut off. Let the inverter be driving 10 identical inverters. Find the total current supplied by the inverter and hence the power dissipated in R_C .
 - (b) With the input high and the transistor saturated, find the power dissipated in the inverter, neglecting the power dissipated in the base circuit. (12%)
6. For the Wien-bridge oscillator circuit in Fig. 6, show that the transfer function of the feedback network $[V_a(s)/V_o(s)]$ is that of a bandpass filter. Find ω_0 and Q of the poles, and find the center-frequency gain. (12%)
7. A BJT is specified to have $T_{Jmax} = 150^\circ\text{C}$ and to be capable of dissipating maximum power as follows:
40 W at $T_C = 25^\circ\text{C}$
2 W at $T_A = 25^\circ\text{C}$
Above 25°C , the maximum power dissipation is to be derated linearly with $\theta_{JC} = 3.12^\circ\text{C/W}$ and $\theta_{JA} = 62.5^\circ\text{C/W}$. Find the following:
 - (a) The maximum power that can be dissipated safely by this transistor when operated in free air at $T_A = 50^\circ\text{C}$.
 - (b) The maximum power that can be dissipated safely by this transistor when operated at an ambient temperature of 50°C , but with a heat sink for which $\theta_{CS} = 0.5^\circ\text{C/W}$ and $\theta_{SA} = 4^\circ\text{C/W}$. Find the temperature of the case and of the heat sink. (12%)

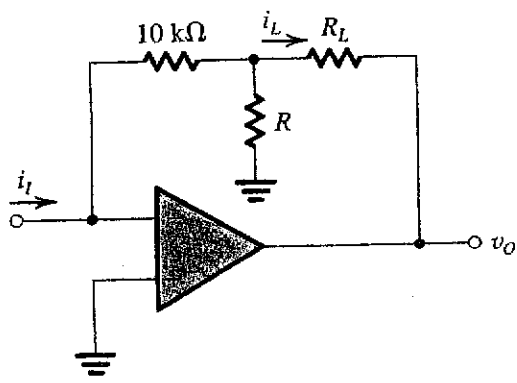


Figure 1

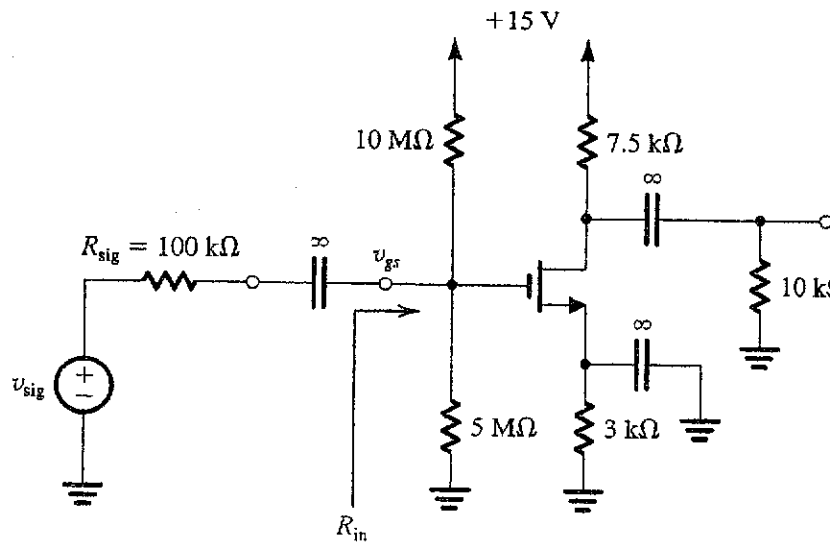


Figure 4

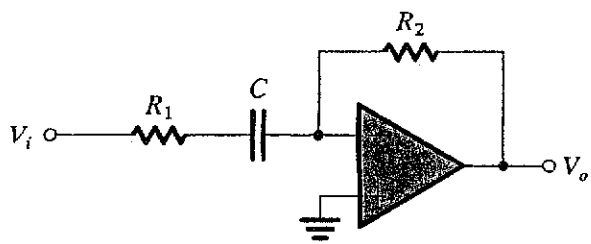


Figure 2

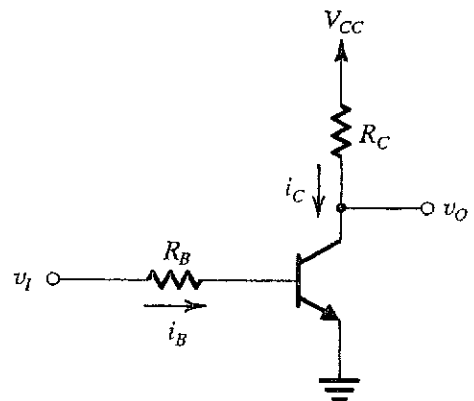


Figure 5

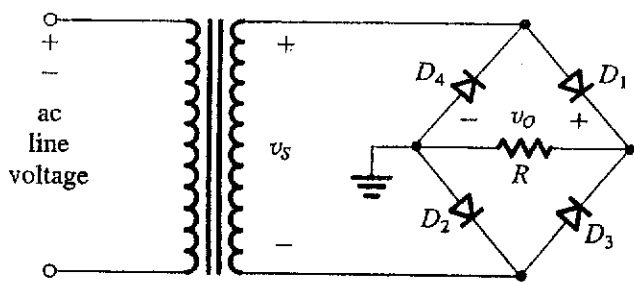


Figure 3

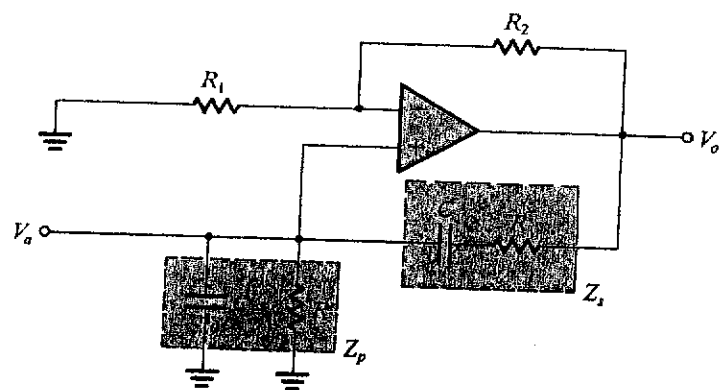


Figure 6

國立中山大學 97 學年度碩士班招生考試試題

科目：微積分【海下海物所碩士班乙組】

共 2 頁 第 1 頁

1. 在時間 t 時，一質點的位置為 $\vec{r} = 3t\vec{i} + t^2\vec{j} + 2t^3\vec{k}$ ，求該質點在時間 t 時的速度與加速度。(10%)

2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{\sin bx}$ ， $a, b > 0$ 的極限 (10%)

3. 計算以下的積分

(a) $\int \cosh x dx$ (5%)

(b) $\int \cos x dx$ (5%)

(c) $\int (x+1)^{20} dx$ (5%)

(d) $\int \sin^{15} x \cos^3 x dx$ (5%)

(e) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ (10%)

4. $\omega(x, y) = N \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}$ ，

(a) 求 ω 在 (x, y) 位置處的梯度。

(b) 證明(a)所求得之 ω 在 (x, y) 位置處的梯度向量與向量 (x, y) 相垂直。

(c) 在 $x=3, y=4$ 處，求 ω 在向量 $(5, 1)$ 方向的方向導數 (即斜率)。

(各 5%)

5. (a)以 Taylor Series 將 $\sin x$ 對 x 展開至第五階 (5%)

(b)求 $\sin 0.1$ 的近似值並探討其誤差 (5%)

6. 假設南海發生地震後於距高雄外海測站 30 公里處產生海嘯，當地

座標 $x=40$ 公里，高雄外海測站座標 $x=10$ 公里，假設海嘯傳播速

度為每小時 $\frac{x^2}{6}$ 公里，求地震發生多少時間後，海嘯會抵達高雄外

海測站。(15%)

7. 旋度與散度

$\vec{F}(x, y, z) = 3xz^2\vec{i} + y^2 \sin z\vec{j} + xye^{2z}\vec{k}$ ，求 $\nabla \wedge \vec{F}$ 與

$\nabla \cdot \vec{F}$ 。(各 5%)

一、選擇題(每題 3 分共 60 分) (請在試卷上作答，否則不予計分)

1. 有關海洋尺度的敘述何者正確?(1)海洋佔全球表面的 70%(2)大洋的平均深度為 4000m(3)西太平洋馬里亞納海溝深達 11500m(4)以上皆是。
2. 南森瓶(Nansen Bottle)是 19 世紀挪威探險家南森所發明，其主要功能是?(1)測聲速(2)採底泥 (3)量葉綠素(4)採海水。
3. 溫鹽深儀(CTD)如何測量海水鹽度的高低?(1)直接測量海水中鹽的重量(2)測量海水的導電度(3)測量水壓(4)測量海水的比重。
4. 海洋觀測儀器的特性比較不重要的為?(1)能抵抗水壓，不使海水滲入損壞儀器(2)在惡劣天候下仍能工作(3)儀器材料必須能抵海水強烈的腐蝕性(4)要有足夠的重量。
5. 鹽度是指一公斤海水中所含有之固體物質之總克數，下列自然現象對鹽度的影響比較小的是?(1)蒸發(2)降雨(3)結冰(4)增溫。
6. 造成海水具有多種色彩的原因為(1)雲彩或天空之反射(2)海水懸浮物質的影響(3)海水選擇性消光作用的影響(4)以上皆是。
7. 牛頓平衡潮理論的要義是講海面因受天體運動所引發的週期性水面升降現象，主要係因何力的平衡?(1)離心力與引力(2)引力與科氏力(3)科氏力與壓力梯度力(4)離心力與科氏力。
8. 潮波在臺灣海峽傳遞時會受到地理環境的影響，臺灣海峽潮差最大之處約在?(1)烏坵(2)新竹(3)澎湖(4)台南。
9. 加拿大的芬地灣是全世界潮差最大之處，當地最大潮差高達 15 公尺，其最重要的因素為?(1)淺水地形摩擦效應(2)海灣長度接近潮波 1/4 波長發生共振(3)入射的潮波在上溯傳播形成湧潮(4)潮汐不等效應。
10. 深水環流主要討論的是海水在垂直方向的運動，驅動深水環流的最主要因素為(1)海水溫鹽分佈(2)海面風應力(3)河川排水(4)全球暖化效應。
11. 大洋環流主要討論的是海水在水平方向的運動，驅動洋流的最主要控制因子為(1)蒸發降雨(2)海水結冰及冰山溶化(3)全球暖化效應(4)海面風應力。
12. 黑潮之平均流量約?Sv (1Sv = $10^6 \text{m}^3/\text{s}$) (1)0.2 (2)2 (3)22 (4)220。
13. 下列何者與厄克曼螺旋(Ekman Spiral)的關係相對上最弱?(1)風吹對海面施加的風應力(2)海水流動時受到的科氏力(3)水流運動時產生的磨擦力(4)海水受日照產生的分層現象。
14. 台灣附近的洋流主要受大洋環流所控制，其長時間的平均流向是?(1)由東向西(2)由西向東(3)由南向北(4)由北向南。
15. 源於祕魯沿岸的聖嬰現象(El Niño)其行為是?(1)赤道太平洋西風減弱，暖水東移至東岸(2)原先之湧升流及冷海流消失，漁產大減(3)印度洋之氣壓分佈產生南方振盪(Southern Oscillation)現象(4)太平洋西岸盛行高壓下沈氣流，東岸也盛行高壓下沈氣流。
16. 同一頻率之波浪傳播時，波速在深水較快，淺水較慢，導致波射線發生彎曲稱為折射，其作用在沙質海岸容易形成?(1)凹形海灣(2)凸形海岸(3)平直海灘(4)以上皆非。
17. 代表波高亦有人稱為有義波高(Significant wave height)，係海面上某點長時間連續觀測，所得波高中選取最大的多少組平均後所得到的數值?(1)1/2(2)1/3(3)1/4(4)1/7。
18. 波高與波長之比值 H/L 稱之波尖銳度(Wave steepness)，當此值大過多少時，波峰附近的水粒子向前運動的速度比波形移動(相速)還要快，波浪便會崩潰破碎?(1)1/2(2)1/3(3)1/4(4)1/7。
19. 風浪大小與風力有關，風浪成熟度又受吹風距離與吹風延時所控制，台灣附近冬季東北季風盛行時何處風浪會較小?(1)澎佳嶼(2)蘭嶼(3)小琉球(4)澎湖。
20. 波浪共振會使波高倍增，颱風波浪常使台灣何處造成港池振盪，致船舶無法繫纜?(1)基隆港(2)花蓮港(3)高雄港(4)台中港。

二、問答題(每題 20 分共 40 分) (請在試卷上作答，否則不予計分)

1. 試述海洋物理學的起源?(例如航海、戰爭、氣候研究、食物尋找等)
2. 下圖為台灣海峽 2000 年 3 月的海表溫度($^{\circ}\text{C}$)等值線圖(黑點為測站)，請依圖描述其水溫分佈?(例如冷熱水的位置、討論其來源、受洋流或季風的影響等)

