

國立中山大學 115 學年度 碩士班考試入學招生考試試題

科目名稱：工程數學【海下所碩士班】

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

- 考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- 答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請斟酌作答。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶書籍、紙張（應考證不得做計算紙書寫）、具有通訊、記憶、傳輸或收發等功能之相關電子產品或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

國立中山大學 115 學年度碩士班考試入學招生考試試題

科目名稱：工程數學【海下所碩士班】

題號：454001

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)

共 2 頁第 1 頁

1. 依據以下曲線方程式

$$y = x^2 - 2x - 3.$$

- (1) (5%) 求出該曲線與 x 軸相交的座標。
- (2) (5%) 求出該曲線於正 x 軸交點的斜率。
- (3) (5%) 計算該曲線與 x 軸所圍成的總面積。

2. (7%) 一平面上有三個點 $P = (1, 0, -1)$ 、 $Q = (-3, 2, -4)$ 和 $R = (1, -6, 2)$ 。求出與該平面垂直的單位向量。

3. (12%) 在所有周長固定為 12 公尺的長方形中，找出能圍出最大面積的長方形尺寸。

4. 針對以下一階微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 3}{2 + 3y^2}$$

- (1) (8%) 使用分離變數法 (Separation of variables) 求其通解 (General solution)。
- (2) (8%) 接著，利用初始條件 $y(1) = 2$ 求其特解 (Particular solution)。

5. (1) (7%) 對於連續可微分函數 $f(x)$ ，其在 a 點之泰勒展開式 (Taylor expansion) 為

$$f(x) \approx f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2 + \dots$$

或

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

請寫出 $\sin x$ 及 $\cos x$ 在 $a = 0$ 泰勒展開式之前四項。

(2) (8%) 根據三角函數合角公式 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ 與上述結果推導出當 x 很小時， $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \approx x$ 。

(3) (10%) 如圖 I，如果一個等邊正三邊形從形心到頂點距離均為 R ，則其面積 A_3 為

$$A_3 = 2 \times \left(\frac{1}{2} (R \sin \theta_3) \times (R \cos \theta_3) \right) \times 3, \quad \theta_3 = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{3}$$

同理等邊正四邊形之面積 A_4 則為

$$A_4 = 2 \times \left(\frac{1}{2} (R \sin \theta_4) \times (R \cos \theta_4) \right) \times 4, \quad \theta_4 = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{4}$$

請問等邊正 n 邊形的面積 A_n 通式為何?

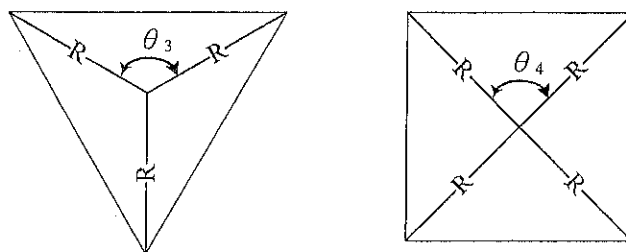


圖 I：(左)等邊正三邊形；(右)等邊正四邊形

(4) (15%) 根據上述推導的面積公式，當 $n \rightarrow \infty$ ，正 ∞ 邊形面積是多少?

國立中山大學 115 學年度碩士班考試入學招生考試試題

科目名稱：工程數學【海下所碩士班】

題號：454001

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)

共 2 頁第 2 頁

6. (10%) 我們可以利用旋轉矩陣 R 要將一向量 $V = [x \ y]^T$ 繞著原點 o 旋轉 θ 度並將長度放大 m 倍到新位置 V' ，如：

$$V' = mRV = m \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

如果 $V = [3 \ 4]^T$ ，我們希望 $V' = [-5.362 \ 4.499]^T$ ，請問 m 與 θ 各為多少？

